Universidad de los Andes
Facultad de Economía

Economía del Bienestar Aplicado

Notas de Clase

Por:

Juan Carlos Mendieta López.

(jmendiet@uniandes.edu.co)

Bogotá. Enero del 2007.

Universidad de Los Andes
Facultad de Economía
Programa de Economía para Graduados - PEG
Apuntes de Economía del Bienestar Aplicado[1]: Primera Parte

Introducción

A diario escuchamos en las noticias como los políticos encargados de tomar decisiones definen políticas y proyectos que tienen un impacto directo sobre la calidad de vida de un gran número de personas. Se puede escuchar como los políticos elegidos a través del mecanismo del voto anuncian nuevas reformas tributarias, la generación de esquemas de impuestos por revalorización de la propiedad o la promulgación de esquemas de pagos o impuestos por contaminación ambiental para los sectores productivos. Todas estas decisiones desde el punto de vista social tienen importantes consecuencias ya que pueden modificar en una u otra forma el bienestar de las personas.

La sociedad entendida como un conjunto de personas que actúan como consumidores y productores experimentan cambios en su nivel de vida ante las medidas de política que pueda adoptar el Gobierno. Es por esta razón que la pregunta primordial ahora tiene que ver con "qué debería ser lo mejor" en términos de la adopción de políticas e implementación de proyectos de inversión que debería hacer el Gobierno para maximizar las ganancias de toda la sociedad.

Según Just, Hueth, Schmitz (2004), el bienestar económico es conocido también con el nombre de bienestar social y éste representa el valor de los cambios en utilidad de las personas expresados en términos monetarios. La utilidad es un concepto técnico utilizado por los economistas que sirve para representar el grado de satisfacción de las personas derivado de las actividades consumo de bienes y servicios ofrecidos en la economía. La utilidad es una variable no observable que nos obliga a pensar en algún tipo de medición recurriendo a un enfoque alternativo.

La Economía del Bienestar Aplicado en calidad de rama especializada de la economía dedicada al análisis de este tema, trata sobre el estudio del uso eficiente de los recursos escasos. Según Just, Hueth y Schmitz (2004), esta rama de la economía trata sobre el estudio del uso eficiente de los recursos escasos. Por lo tanto, el concepto clave en toda esta discusión es la eficiencia económica[2]. De otra parte, debe tenerse en cuenta que los cambios en bienestar son generados por cambios en precios de los bienes y/o factores y en el ingreso de los individuos a través de la adopción de políticas, regulaciones e implementación de proyectos.

---

[1] Por: Juan Carlos Mendieta (jmendiet@uniandes.edu.co), versión preliminar no publicable, ni citable, sin permiso del autor.

[2] Lo que en los libros de microeconomía se conoce como la maximización del pastel o la maximización de los excedentes económicos. La eficiencia económica tiene que ver con la asignación de los recursos con que cuenta la sociedad a los usos que generan los mayores valores económicos.

El propósito fundamental de todo análisis de bienestar aplicado es el ordenamiento de los estados de la economía, entendido como un ordenamiento de los estados del mundo.

Un estado de la economía esta conformado por un conjunto de dotaciones de productos, insumos, tecnología, base de recursos y capital humano que hace que la sociedad experimente un nivel específico de bienestar. En la economía pueden existir infinitos estados[3].

En la práctica, tratar de ordenar todos los estados de la economía según lo que más le convenga a la sociedad resulta imposible, por consiguiente, en los análisis de bienestar aplicado en términos empíricos se trabaja teniendo en cuenta dos o como máximo tres estados.

La Economía del Bienestar Aplicado se puede dividir en tres grandes partes. La primera tiene que ver con la definición de los criterios de evaluación de políticas. La segunda tiene que ver con la medición del bienestar de los consumidores y los productores y la tercera es el análisis de política e inferencia de lo mejor para la sociedad.

La Economía del Bienestar Aplicado es la teoría, mientras que el análisis costo beneficio o evaluación económica contiene el conjunto de metodologías y procedimientos que se usan para la evaluación de políticas y/o proyectos elegidos para dar solución a problemas empíricos.

A continuación se detallan una serie de preguntas tratadas por los economistas de bienestar aplicado que son de vital importancia en el campo del diseño y evaluación de políticas públicas.

¿Cuál es el instrumento que utiliza el gobierno para la toma de decisiones? Bajo el criterio de eficiencia económica o eficiencia pura, el diseño y adopción de políticas y proyectos de interés público, se realiza a través del análisis costo beneficio económico y/o evaluación económica de proyectos.

¿Qué es un proyecto? Es una propuesta de acción técnico económica para resolver una necesidad utilizando un conjunto de recursos disponibles, los cuales pueden ser, recursos humanos, materiales y tecnológicos entre otros.

Un proyecto tiene como objetivo principal aprovechar los recursos escasos con que cuenta la sociedad para mejorar las condiciones de vida de una comunidad, pudiendo ser a corto, mediano o a largo plazo. Comprende desde la intención o pensamiento de ejecutar algo hasta el término o puesta en operación normal. Este responde a una decisión sobre uso de recursos con algún o algunos de los objetivos, de incrementar, mantener o mejorar la producción de bienes o la prestación de servicios.

[3] Luego estudiaremos que esto tiene implicaciones importantes a la hora de tratar de establecer ordenamientos de todos los estados de la economía.

¿Qué es una política pública? Las políticas publicas generalmente se definen desde el punto de vista de la "decisión" del gobierno, que opta o no por aplicarla. Dye (2005)[4], menciona que una política pública es aquello que el gobierno escoge hacer o no hacer", Frohock (1979)[5] menciona que una política pública es: una práctica social y no un evento singular o aislado, ocasionado por la necesidad de reconciliar demandas conflictivas o, establecer incentivos de acción colectiva entre aquellos que comparten metas.

Una política pública es la decisión gubernamental plasmada en la resolución de un problema en la comunidad, ahora bien, si una decisión no es a fin de cuentas llevada a cabo solo queda en la elaboración de la política pública y no en su verdadera implementación, es decir solo queda en el papel. Siguiendo con esta línea de pensamiento, el gobierno tiene que dar solución a problemas que surjan en la sociedad a través de la política pública, y sí opta por no dar solución entonces no cumple con su función primordial que es la de atender los problemas y/o necesidades de la sociedad.

La formulación de una política conduce a la elaboración de un producto de análisis, cuyo destino es un actor político.

¿Cuál es la relación existente entre la economía positiva y la normativa? Partiendo de los dos conceptos: (1) **Economía Positiva**: Se define como la ciencia que busca explicaciones objetivas del funcionamiento de los fenómenos económicos; se ocupa "de lo que es o podría ser". Por ejemplo, el estudio de la relación precios cantidad demandada. (2) **Economía Normativa**: Esta economía es la que concierne a la economía del bienestar. Ofrece prescripciones para la acción basadas en juicios de valor personales y subjetivos; se ocupa "de lo que debería ser". Por ejemplo, cuáles deberían ser los incentivos económicos que lograrían disminuir la congestión en una ciudad. En otras palabras, el análisis de bienestar aplicado bajo el enfoque normativo responde a unos criterios éticos, ideológicos o políticos sobre lo que se considera deseable o indeseable para la sociedad.

La economía positiva a partir del estudio de los fenómenos económicos provee información que ayuda a responder la pregunta de lo que se debería hacer, esta evidencia puede servir como información base para los estudios desarrollados bajo el enfoque normativo. La Economía del Bienestar Aplicado funciona bajo el enfoque normativo debido a que se enfoca en generar el uso eficiente de los recursos a través de la mejora en los procesos de toma de decisiones. Todas las proposiciones de la Economía del Bienestar Aplicado se basan en deducciones lógicas sobre lo que debería convenir más a la sociedad y se tiene como objetivo principal estudiar la eficiencia económica como un criterio que permite alcanzar el nivel máximo de bienestar para todos los individuos de una sociedad. Por supuesto, a la hora de tomar una decisión en el análisis de bienestar aplicado también se pueden considerar otros criterios de elección de políticas como por el ejemplo, el criterio de equidad, el criterio de sostenibilidad financiera y el de flexibilidad. Este último entendido en términos de que toda política pública, para su ejecución, debe tener el cuenta el entorno

---

[4] Dye, T. R. (2005). *Understanding Public Policy*. 11th Edition.
[5] Frohock, F. M. (1979). *Public Policy : Scope and Logic*. Prentices Hall.

económico que prevalece sobre la economía que se quiere intervenir con la acción pública.

¿Cuál es la relación entre las proposiciones de la Economía del Bienestar y los supuestos basados en juicio de valor? Para que un juicio de valor sea aceptado por toda la sociedad, éste debe tener un fundamento ético. Estos fundamentos éticos son la base de Economía del Bienestar Aplicada y la evaluación de políticas públicas.

Juicio I: Cualquier nivel de bienestar de la sociedad debe ser juzgado solo por sus miembros, reconociendo la importancia del individuo como elemento básico de la sociedad. Esta proposición es llamada postulado ético fundamental o principio del individualismo (Quirk y Saposnik, 1968).

Juicio II: Apoyar la idea de que la sociedad esta mejor si por lo menos un individuo mejora sin que empeore la situación de otro u otros. Esta proposición es conocida con el nombre de principio de Pareto (Pareto Wilfredo, 1896).

Siempre se debe tener en cuenta que el objetivo principal de la economía del bienestar aplicado es establecer un ordenamiento de los estados del mundo teniendo en cuenta que las herramientas (conocidos con el nombre de criterios de elección de políticas) utilizadas para dicho ordenamiento. Estos criterios deben estar soportados en juicios de valor aceptados de manera unánime por la sociedad y no de manera parcial.

¿Qué es el Bienestar económico? No es una variable observable como las maquinas, las casas o precios de mercado. Éste se representa formalmente por el nivel de utilidad o satisfacción de un individuo. Bienestar es sinónimo de utilidad, este último es un concepto que representa la satisfacción de las personas derivada del consumo de bienes y servicios. La utilidad es una variable no observable, por esta razón es que en bienestar gran parte del esfuerzo se enfoca en encontrar medidas de bienestar ante la limitante de poder medir y cuantificar la utilidad.

También se debe mencionar que los cambios en bienestar que nos interesa medir son aquellos generados por cambios en precios y el ingreso de los individuos a través de políticas y/o proyectos.

De la Economía Positiva, sabemos que un postulado básico de la teoría del consumidor es que la utilidad aumenta si se incrementa el consumo de bienes y servicios. En Economía Bienestar Aplicado nos interesa saber en cuanto se incrementa. Es decir, nos interesa el bienestar expresado en números o cifras para presentarlos como evidencia empírica para la toma de decisiones.

El indicador de utilidad de la Economía Positiva es ordinal y solo sirve para ordenar canastas en términos de la preferencia de una canasta sobre otra. En cambio, la Economía del Bienestar Aplicado se encuentra interesada en la intensidad de las preferencias para determinar cuales consumidores deberían recibir determinados tipos de bienes que son escasos. Ahora se hace necesario hablar de un sistema cardinal que represente las intensidades en las preferencias.

¿Qué es un sistema Cardinal?

Un sistema cardinal especifica cuanta utilidad gana o pierde un individuo como resultado de la ejecución de una política. Esta información ayuda a determinar el máximo nivel de bienestar de la sociedad con lo cual se simplifica sustancialmente el problema de medición de bienestar.

¿Cómo funciona la compensación en economía del bienestar?

El principio de compensación potencial de Kaldor y Hicks establece que un estado B es preferido a un estado A, si al movernos de un estado a otro, todos potencialmente pueden estar mejor.

Scitovsky (1941), advierte que puede presentarse una paradoja, es decir:

1. Los ganadores compensan a los perdedores al irse produciendo el movimiento del estado A al estado B usando la distribución de precios e ingresos iniciales para evaluar dicho cambio.
2. Los perdedores pueden compensar a los ganadores para reversar el cambio usando la subsiguiente distribución de precios e ingreso para evaluar el cambio.

Con esto se pueden tener casos en donde el estado B puede ser preferido al estado A y el estado A puede ser preferido al estado B. Esto se resuelve a través de la adopción del criterio Kaldor Hicks Scitovsky donde se establece que el estado B es preferido al estado A solo cuando los ganadores compensen a los perdedores con el cambio y que los perdedores no puedan sobornar a los ganadores para reversar el cambio.

Este criterio fue estudiado y ampliado por Samuelson (1947, 1956), este autor compara todas las posibles redistribuciones de precios e ingreso del resultado asociado con el estado A.

La palabra potencial es crítica aquí debido a que el estado B es preferido al estado A tanto como sea posible si los ganadores pueden compensar a los perdedores – no solo cuando los ganadores compensan actualmente a los perdedores. Es decir, el principio solo se basa en compensaciones potenciales.

Algunos economistas afirman que el criterio de compensación tiene implícito un juicio de valor. Se sabe que una ganancia en bienestar ocurre solo cuando efectivamente alguien en la sociedad mejora y ninguno empeora. Entonces, si vamos un poco más allá en el entendimiento del criterio podemos comprobar que la compensación potencial implica que algunos individuos de la sociedad pierden y otros ganan efectivamente. Dejando de un lado de que el ganador sea un pobre o un rico, la sociedad como un todo puede estar perdiendo. Por consiguiente, la aplicación de este criterio cuando la compensación no es pagada es claramente un juicio de valor.

Un análisis de bienestar sin sesgos debería incluir la estimación de los impactos de una política sobre los diferentes grupos de la sociedad y dejar que las autoridades del

Gobierno sean las encargadas de elegir el juicio de valor que se debe usar en la escogencia de la política pública.

La Variación Compensatoria (VC) y la Variación Equivalente (VE)

La elección de una política depende de la magnitud de las ganancias de los ganadores y los costos de los perdedores. Estas medidas aparecen debido a que la utilidad es una variable que no se puede medir.

Debido a que muchas políticas se eligen con base a la magnitud de los beneficios de los ganadores y de los costos de los perdedores, la medición en términos cuantitativos a menudo resulta crítica. Hicks propone la VC y la VE como medidas de bienestar económico para medir los cambios en utilidad de los consumidores y productores. En términos empíricos estas medidas se interpretan como una Disponibilidad a pagar, DAP, y Disponibilidad a aceptar, DAA.

Con estas medidas, Hicks propone una alternativa de cuantificación de las preferencias expresadas en términos monetarios, tomando en cuenta el movimiento de un estado a otro. Estos conceptos junto con el principio de compensación Kaldor-Hicks son el fundamento del enfoque moderno de la economía del Bienestar Aplicado.

Con la vieja economía del Bienestar la DAP se aproximaba con el EC, ahora esta medida es exacta al utilizar la VC y la VE (herramientas de medición). Medidas propuestas por la Nueva Economía del bienestar Aplicado.

La VC, se define como la cantidad de dinero que hay que sustraer del individuo después del cambio económico para dejarlo justo en el nivel de bienestar que tenia antes del cambio. Para una ganancia en bienestar la VC es la máxima cantidad de dinero que la persona debería estar DAP por el cambio. Para una perdida la VC es el negativo de la mínima cantidad de dinero que la persona debería requerir como compensación con el cambio.

La VE, es la cantidad de dinero pagada a un individuo que lo deja justo en el nivel de bienestar nuevo, como si el cambio económico hubiese ocurrido.

Para una ganancia en bienestar la VE es la mínima cantidad de dinero que se le debería dar al individuo como compensación por renunciar al cambio. Para una pérdida es el negativo de la máxima cantidad de dinero que el individuo debería estar dispuesto a pagar para evitar el cambio.

¿Qué es la Eficiencia y qué es la Equidad? La eficiencia económica tiene que ver con la producción y facilitación del consumo en lo posible concordando con la disponibilidad de recursos. En cambio, la equidad tiene que ver como se deben distribuir los bienes de manera igualitaria o equitativa entre los miembros de una sociedad. En las discusiones entre eficiencia y equidad generalmente salen a relucir las siguientes preguntas:

¿Los mercados competitivos es el estado más preferible para la sociedad?, ¿cuáles son los efectos distribucionales de la competencia imperfecta y el poder monopólico?, ¿cómo podemos medir los efectos del poder monopólico?. Estas preguntas son objetos de estudio de la Economía del Bienestar Aplicado.

Dada una distribución de ingresos y recursos iniciales, posiblemente podría mejorar la eficiencia del mercado y con esto la sociedad puede estar mejor. Sin embargo un sistema económico puede ser muy eficiente pero no equitativo. La eficiencia solo puede ser definida con referencia a una distribución del ingreso dado. Si hay un cambio en la distribución se debería producir un cambio en el nivel óptimo de producto combinado bajo un equilibrio competitivo. No existe una forma objetiva de determinar al mismo tiempo el nivel de producto ideal y la distribución ideal.

Existen muchos estados económicos eficientes, cada uno correspondiente a diferentes distribuciones de ingreso. La elección de una distribución de ingreso es un objetivo de política que puede ser resuelto solamente a través de juicio de valor en los procesos de política.

¿Qué significan las ponderaciones en Bienestar? El enfoque de ponderación en Bienestar, surge como alternativa de solución al problema de elegir una distribución de ingreso óptima bajo fundamentos objetivos. En el análisis de Bienestar algunos economistas asumen que la ponderación del bienestar es igual para varios grupos de individuos, a partir de esto a través de su modelo intentan identificar mejoras potenciales en el sentido de Pareto. Siempre tenga en cuenta que las ponderaciones implican juicios de valor, y que como tal, si este juicio de valor no es aceptado caería en el problema de las comparaciones interpersonales[6].

Por ejemplo, suponga que un mercado pasa de competencia perfecta a monopolio con este cambio los que deberían perder serian los consumidores, los que ganarían serian los productores. En este tipo de análisis tener una ponderación única implica que la pérdida de un peso de un consumidor es la ganancia de un peso para un productor. Sin embargo, un tomador de decisión puede preferir una ganancia de 10 pesos para un pobre a expensas de una perdida de 11 pesos para un rico. La imposición de un impuesto al ingreso gradual con asistencia de bienestar a los pobres, es evidencia de lo anterior y además suministra las bases para la determinación del esquema de ponderación en concordancia con las preferencias reveladas por la política.

Los políticos tiene su propia función de utilidad y las políticas que eligen siempre se encuentran plagadas de juicio de valor, en su mayoría de naturaleza no económica. Un enfoque alterno propuesto por la economía del Bienestar nos dice que el tomador de decisión puede elegir una política basado en su esquema de ponderaciones, libre de juicio de valor. Cuando Economía del Bienestar Aplicado, se concentra en estudiar los efectos distributivos de los principales grupos de la sociedad en vez de solamente estudiar los efectos agregados de la política, va más allá en la generación de la

[6] La elección de una política esta basada en un juicio de valor que puede terminar beneficiando más a una persona o grupo en la sociedad. Obviamente, este juicio de valor empleado al elegir una política pública en cuestión no tiene aceptabilidad total desde el punto de vista social.

información para los tomadores de decisión, esto mejora significativamente los procesos de elección de políticas.

Mueller (1979) y Van Den Doel (1979), presentan de manera detallada la teoría de elección pública bajo una democracia. Afirman que los principales tópicos de la economía del bienestar aplicado son la formulación y evaluación de políticas y la teoría de elección. Dentro de esta teoría incluyen el tema de la Función de Bienestar Social. "Bergson (1938)[7]", afirman que una función de Bienestar Social Hipotética, como la propuesta por Bergson puede resolver el conflicto entre la eficiencia y la equidad, adicionalmente trabaja con la teoría de justicia social. Rawls (1971), argumenta que el análisis de bienestar puede ser desarrollado en función de la persona más desfavorecida en la sociedad.

La Vieja Economía del Bienestar versus la Nueva Economía del Bienestar

Bajo la vieja economía del bienestar el pensamiento seguido era que los excedentes económicos de la sociedad se maximizaban cuando se garantizaban las condiciones de competencia perfecta en los mercados. Los principales precursores son:

Ricardo (1829): La teoría del valor.
Smith (1937): La teoría de la mano invisible.
Dupuit (1844): Primero en proponer la idea de excedente del consumidor.
Marshall (1930): Formaliza el concepto del excedente del consumidor.

Todos estos autores con sus aportes conforman la base del análisis empírico de bienestar aplicado.

Se supone:

- Las ganancias en bienestar son maximizadas en los mercados competitivos.
- Si hay fallos, el gobierno esta justificado para intervenir a través de políticas.
- Se emplea la técnica de análisis de equilibrio parcial.
- El excedente del consumidor es la medida de bienestar del consumidor, el excedente del productor es la medida de bienestar del productor.
- Existen infinitos estados de la economía, se ordenan a través del criterio de Pareto.

Bajo la nueva economía del bienestar se tienen otros aportes de gran importancia provistos por un conjunto de economistas ampliamente reconocidos.

Pareto (1848-1923), la sociedad gana, cuando por lo menos una persona gana y ninguna empeora.

---

7 Deriva las condiciones de primer de primer orden del problema de maximización del bienestar social sujeto a la restricción de recursos disponibles.

- Kaldor (1939), Hicks (1939), los cambios en bienestar de los individuos no son iguales y una simple adición no es suficiente. También, tienen el principio de compensación (existe una mejora en bienestar si se alcanza ganancias potenciales a partir de otra redistribución). Se enfocan en el problema de medición (VC, VE, EC, EE)
- Scitovsky (1941), al usar el principio de compensación se pueden presentar inconsistencias (paradoja de reversibilidad).
- Samuelson (1942), el Excedente del Consumidor no se encuentre bien definido, tiene problemas de unicidad.
- Gorman (1955), extiende el análisis de Scitovsky y demuestra la existencia del problema de intransitividad.
- Lipsey y Lancaster (1956-1957), el equilibrio parcial es inadecuado, es difícil argumentar que la economía como un todo esta libre de interferencias no competitivas.
- Willig (en los 70s), rescata el concepto del Excedente del Consumidor de la crítica formulada por Samuelson como medida de bienestar no recomendada para medir el bienestar del consumidor.
- Hausman y Vartia (en los 80s), proponen medidas exactas.
- Krutilla (en los 80s), afirma que a pesar de la controversia, la economía del bienestar a florecido y se usa en al actualidad (segundo mejor).

En la siguiente sección iniciamos el estudio de los criterios de elección de políticas.

Criterios de Elección de Políticas.

Los criterios de elección de políticas son juicios valor propuestos por la economía del bienestar para ayudar a los tomadores de decisiones a elegir entre diferentes alternativas de política, se busca la alternativa que maximice el bienestar de la sociedad. Por esta razón es que uno de las finalidades de los análisis de bienestar es establecer un ordenamiento entre diferentes estados de la economía. Este ordenamiento debería ser consistente con las preferencias de la sociedad determinada a partir de sus necesidades más apremiantes.

Un juicio de valor es una apreciación subjetiva sobre algo, en política pública los juicios de valor pueden llegar a ser muy controversiales, estos pueden diferir grandemente entre las personas encargadas de tomar decisiones.

Primer Criterio: La Función de Bienestar Social

Estamos pensando en dos estados de la economía I y II. Se pueden dar los siguientes casos: (1) que el estado II sea preferido al estado I, (2) que el estado I sea preferido al estado II. También para los análisis que haremos en esta sección pensaremos en el caso más simple en que la sociedad solo se encuentra conformada por dos individuos A y B. Este criterio permite establecer un orden social de los posibles estados de la economía "productos de diferentes políticas". Esta función permite que se hagan comparaciones entre diferentes políticas y que se escoja la política que maximiza el bienestar de la sociedad. La función de bienestar social (FBS) especifica el bienestar de la sociedad como una función de la utilidad de los individuos[8].

$$W^{soc} = W(U_A, U_B, \ldots\ldots\ldots, U_N)$$

Esta función se puede representar gráficamente a través del concepto de Curvas de Indiferencia de Scitovsky (CIS). La CIS es una curva de indiferencia de bienestar social que representa diferentes combinaciones de los niveles de utilidad de los individuos que nos llevan a un mismo nivel de bienestar social. El problema con este criterio es que aún no existe un acuerdo acerca de la forma funcional que debería tener la FBS.

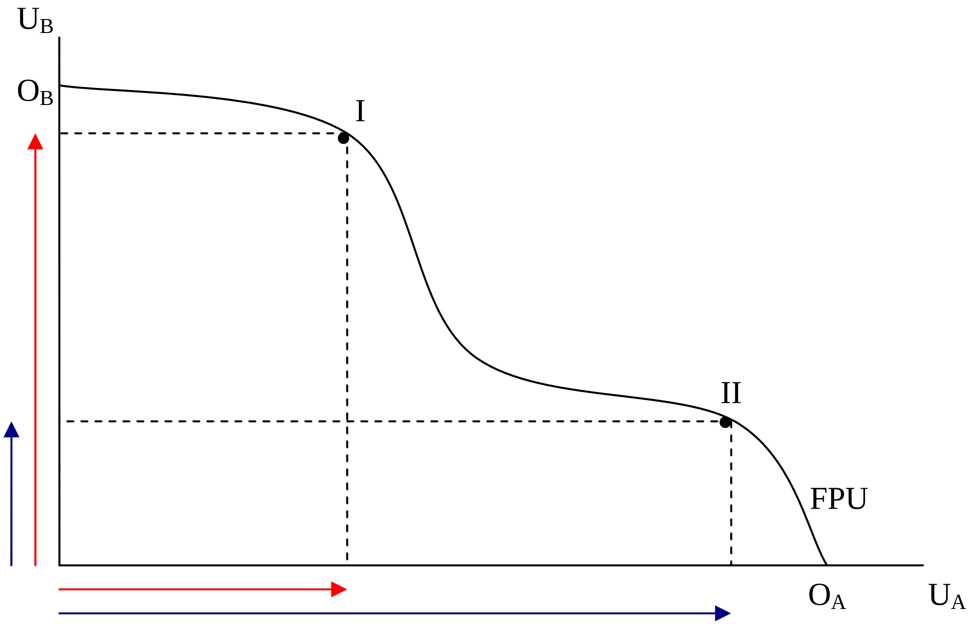


Figura 1: El Problema de las Comparaciones Interpersonales.

El establecimiento de una forma funcional implicaría el empleo de juicios de valor. Por definición un juicio de valor es una afirmación subjetiva acerca de lo que es de valor para la sociedad.

Definir esta función es por sí un juicio de valor, formalizarla lo es aún más. Para que sea aplicable la FBS se requieren juicios de valor adicionales. Por lo general, las políticas públicas estarán influenciadas por las personas que toman las decisiones en la sociedad. Supongamos que tenemos dos individuos en la sociedad, unos recursos escasos para repartir entre ambos y una frontera de posibilidades de utilidad. Cualquier punto que se escoja para maximizar el bienestar de la sociedad implica un juicio de valor. Esto se puede apreciar con mayor detalle a través de la anterior figura. Los estados A y B son dos óptimos de política definidos bajo diferentes juicios de valor. Este problema en la literatura de bienestar aplicado se conoce con el

[8] Bergson (1938).

nombre de Comparaciones interpersonales, esta es otra de las desventajas del criterio de la función de bienestar social.

Luego, ante esta situación, las preguntas que nos debemos hacer son: ¿qué criterios tenemos para escoger A o B?, ¿por qué una política donde se alcance el punto A ($U_B > U_A$) se puede escoger sobre el punto B ($U_A > U_B$)?, ¿Qué nos permite un ordenamiento social sobre los estados del mundo (de la economía)?. Para poder dar respuesta a estas preguntas necesitamos imponer un esquema:

$$Max\ W^{soc}(U_A, U_B)$$

El anterior implica un juicio de valor que es ampliamente aceptado por todos los economistas y diseñadores de políticas públicas. Es decir, buscar maximizar el bienestar de la sociedad que es función directa de las utilidades de los individuos. Para hacer que la Función de Bienestar Social sea operacional debemos imponer más estructura, esto implica adicionar un juicio de valor. ¿Cuáles juicios de valor adicionales se pueden imponer que no sean tan fuertes?

1. El bienestar de la sociedad aumenta si la utilidad de un agente económico aumenta y la de los otros permanece igual. En términos económicos esto implica:

$$\frac{\partial W}{\partial U_A} > 0$$

Lo anterior implica el Principio de Pareto.

2. Si después de un cambio, un individuo empeora, entonces otro individuo tiene que estar mejor para conservar constante el nivel de bienestar de la sociedad. En términos matemáticos esto implica:

$$\frac{\partial W}{\partial U_A} dU_A + \frac{\partial W}{\partial U_B} dU_B = 0 \Rightarrow \frac{dU_B}{dU_A} = -\frac{\partial W / \partial U_A}{\partial W / \partial U_B} < 0$$

Lo anterior implica que la pendiente de los contornos de bienestar tiene pendiente negativa debido a la propiedad de utilidades marginales de los individuos A y B:

$$\frac{\partial W}{\partial U_A} > 0 \text{ y } \frac{\partial W}{\partial U_B} > 0$$

3. Si un individuo tiene un nivel alto de utilidad y el otro individuo tiene un nivel bajo de utilidad, la sociedad estará dispuesta a sacrificar parte de la utilidad del primer individuo para incrementar la utilidad del segundo individuo. Esto implica que los contornos de bienestar son convexos hacia el origen.

Entre más alta sea la utilidad del individuo A menor será la contribución al incremento en la Función de Bienestar Social. Esto implica que la sociedad esta dispuesta a reducir un poco la utilidad del individuo A para incrementar la utilidad del individuo B.

$$\frac{\partial(\partial W/\partial U_A)}{\partial U_A}$$

Por ejemplo, la adopción de una política que cause un movimiento desde el punto A hasta el punto B resulta en una ganancia de utilidad para el individuo B y una pérdida de utilidad para el individuo A. Este tipo de políticas involucra Comparaciones Interpersonales. Es decir, requieren de la comparación entre la ganancia en beneficios por parte de un individuo y la pérdida en beneficios por parte de otro individuo.

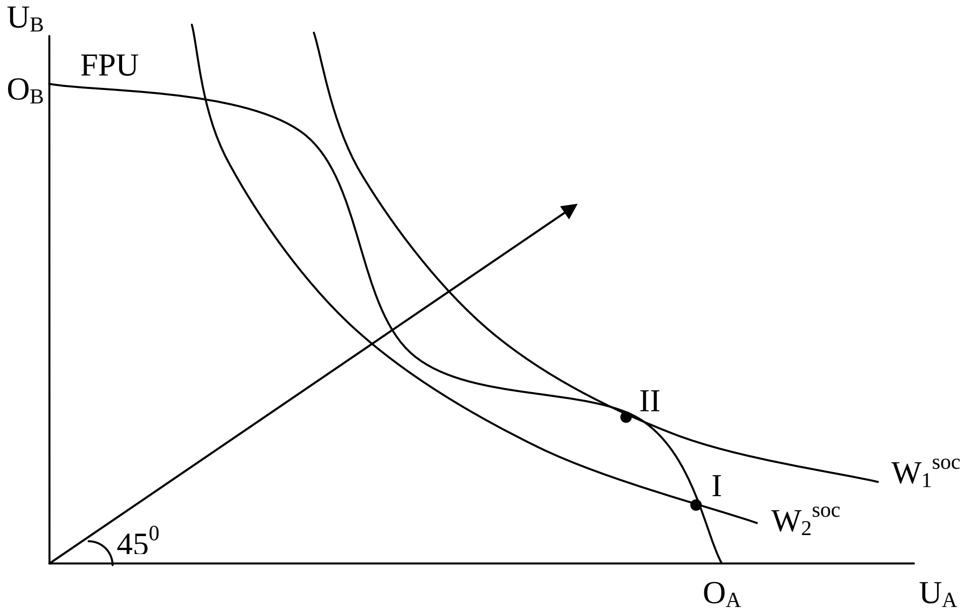


Figura 2: Los Contornos de Bienestar Social.

¿Qué significa que los contornos de bienestar sean simétricos alrededor de una línea de 45 grados trazada a partir del origen del mapa de curvas de indiferencias?. Si todos los individuos tienen funciones de utilidad idénticas, entonces la frontera de posibilidades de utilidad es también simétrica alrededor de una línea de 45 grados y la optimalidad de Pareto es alcanzada con perfecta igualdad entre los individuos. Además, si un individuo recibe proporcionalmente más utilidad del consumo de las mismas canastas de bienes que otros, entonces una Función de Bienestar Social debería asignar diferentes ponderaciones al consumo de los individuos.

Bajo estas condiciones, el Bienestar Social se maximiza al alcanzar el mayor Contorno de Bienestar tangible con la Frontera de Posibilidades de Utilidad. Por consiguiente, un Contorno de Bienestar Social es W_1 como el de la figura anterior. En este caso, se puede obtener un nivel óptimo social único. Note que la pendiente del Contorno de Bienestar puede ser representada como:

$$-\frac{\partial W/\partial U_A}{\partial W/\partial U_B}$$

Sí, $W(U_A, U_B)$ es diferenciable. Y también, si la utilidad del individuo depende de cuanto de cada bien sea asignado al consumidor tal que $U_j = U_j(q_j), j = A, B,$ entonces, la pendiente de la Frontera de Posibilidades de Utilidad es:

$$-\frac{\partial U_B/\partial q_B}{\partial U_A/\partial q_A}$$

Asumiendo que las funciones de utilidad son diferenciables y crecientes con respecto a q_j. Entonces, la condición de tangencia puede ser representada matemáticamente como:

$$\frac{\partial W/\partial U_A}{\partial W/\partial U_B} = \frac{\partial U_B/\partial q_B}{\partial U_A/\partial q_A}$$

Esto equivale al punto B de la anterior figura. Multiplicando cruzado, resulta:

$$\frac{\partial W}{\partial U_A}\frac{\partial U_A}{\partial q_A} = \frac{\partial W}{\partial U_B}\frac{\partial U_B}{\partial q_B}$$

Esta condición implica que el valor marginal social del consumo para cada bien debe ser igual a través de todos los individuos.

Limitaciones de la Función de Bienestar Social

Aunque la Función de Bienestar Social es un concepto conveniente y poderoso en teoría, su utilidad práctica no es muy ilusoria. Se han hecho muchos intentos por especificar una Función de Bienestar Social capaz de facilitar su utilidad empírica pero esta no ha sido ampliamente aceptada. Aparentemente, existe poca esperanza de obtener una Función de Bienestar Social bajo un acuerdo general, en vista de esto, surge el criterio de Pareto como una herramienta que logra superar algunos problemas del criterio de la función de bienestar social.

Principales Enfoques

1. Enfoque Subjetivo: Los primeros estudiantes de la escuela utilitarista (como Bentham) creyeron que los cambios en la felicidad debían simplemente ser adicionados para todos los individuos, como se presenta en la siguiente ecuación. Unas ganancias netas positivas son vistas bajo este enfoque como un fundamento para la implementación de políticas. Esto implica que los contornos de bienestar de la anterior figura deberían expandirse siguiendo una línea con pendiente –1. La función de bienestar social propuesta por Bentham es:

$$W^{soc} = \sum_{j=1}^{J} U^j$$

Bajo esta función el bienestar social es función del bienestar de todos los consumidores. Se supone que las ponderaciones son iguales para todos los miembros de la sociedad. Se tiene una función de bienestar de la siguiente forma:

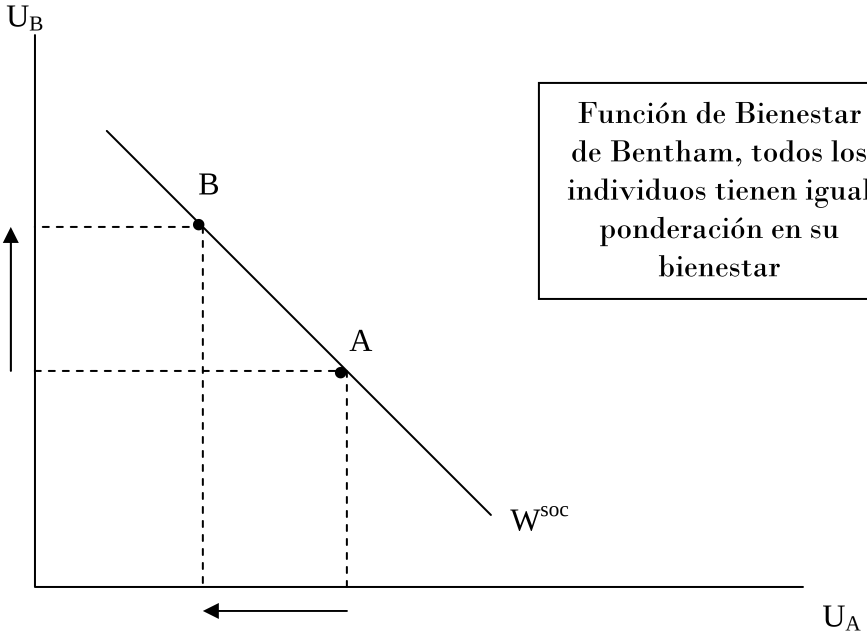


Figura 3: Función de Bienestar Social de Bentham.

Bajo esta forma funcional el sacrificio de pobres y ricos es igual, algunas personas no están en acuerdo con esto. Otras personas están en acuerdo que la función de bienestar social sea convexa para poder representar de una mejor manera el grado de sacrificio entre los miembros de la sociedad.

¿Qúe sucede si eliminamos J?: si eliminamos J, los miembros de la sociedad son iguales en términos de las ponderaciones de utilidad. Es decir:

$$W^{soc} = \sum_{j=J} U$$

No existe acuerdo sobre esto, por que es bien sabido que todos los individuos no son iguales. Por ejemplo, Bill Gates dueño del imperio Microsoft tiene una fortuna de cincuenta billones de dólares. Si el bienestar social es maximizado con base en el individuo con el más bajo nivel de utilidad el bienestar sería mínimo. Es decir, la cantidad de compensación que habría que darle debería ser mínima. Esto se estudiará más en detalle cuando estudiemos el enfoque de justicia social.

En cambio, bajo una función de bienestar social con una forma funcional convexa, la curvatura de W^{soc} representaría de una mejor manera el grado de desigualdad en las ponderaciones. Esto se puede observar en la siguiente figura.

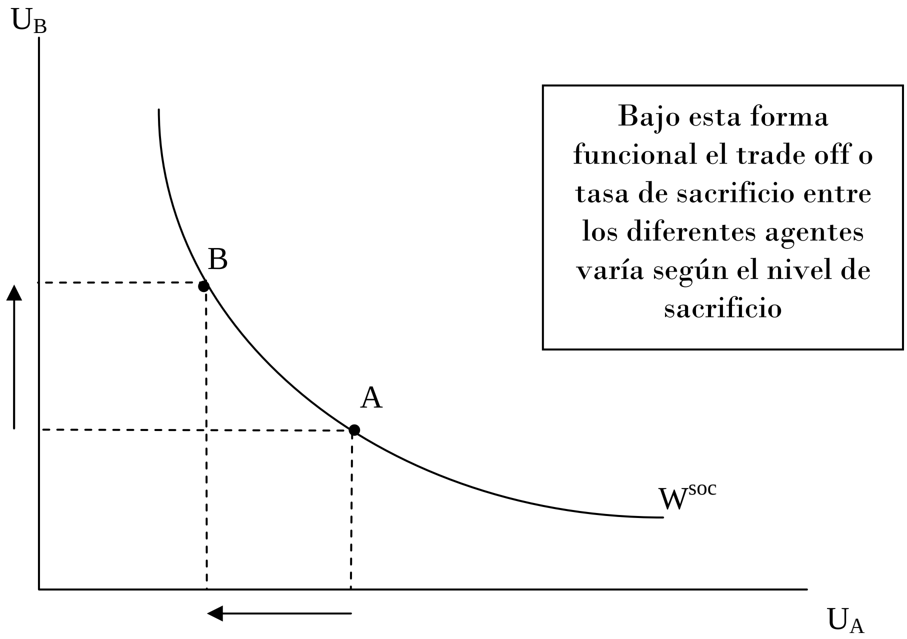


Figura 4: Función de Bienestar Social Convexa.

Otros suponen una forma funcional que refleje los beneficios positivos de mejorar la equidad consistente con juicios de valor distribuidos normalmente. Entonces, una Función de Bienestar social que refleje aversión a la inequidad se puede representar como:

$$W^{soc} = \frac{1}{1-\rho}\sum_{j=1}^{J}(U^{j})^{1-\rho}$$

Donde, ρ es el coeficiente de aversión a la inequidad. El problema enfrentado aquí es que el término normal es ambiguo. Por ejemplo, no se ha podido alcanzar un acuerdo sobre el nivel apropiado de aversión a la inequidad, por ejemplo, el valor apropiado de ρ en la anterior ecuación. Si $\rho = 0$ se tiene la función de bienestar de Bentham y la elasticidad de sustitución es $\sigma = 1/(1-\rho) = 1$, si ρ tiende a infinito luego $\sigma = 0$ y la forma funcional de la función de bienestar corresponde a una Leontieff (función de bienestar social de Rawls) y si $\rho = 1$ la forma funcional de la función de bienestar social corresponde a una multiplicatoria de las utilidades de todos los miembros de la sociedad.

$$W^{soc} = \prod_{j=1}^{J} U^{j}$$

2. Enfoque Axiomático

Intenta investigar la existencia y forma de la Función de Bienestar Social matemáticamente basada en un conjunto de axiomas fundamentales aceptables acerca de las preferencias de los individuos y como estas cuentan para la sociedad. Uno de los principales esfuerzos es el teorema de imposibilidades de Arrow. Este teorema dirige la pregunta "¿si existe una regla general que pueda ordenar los estados sociales basados únicamente en la forma en que estos estados puedan ser ordenados por cada uno de los individuos de la sociedad?”.

Un ejemplo de una regla que no es compatible con lo anterior es la votación por mayoría. Los resultados de Arrow sugieren que si las preferencias de la sociedad son representadas por un dictador (o por un grupo de personas que actúan como dictador), la utilización de intensidades de las preferencias de los individuos en vez de utilizar un ordenamiento simple de estas, o que uno de los otros axiomas, como por ejemplo, el de independencia de alternativas irrelevantes no se aplique, se podría encontrar una forma funcional para la Función de Bienestar Social que represente las preferencias de una sociedad.

Arrow propone un conjunto de condiciones para obtener una función de bienestar razonable:

Condición 1 – partamos una función de bienestar social definida para todo par de ordenamientos admisibles para un individuo. Suponga que estos ordenamientos individuales admisibles son R_1 y R_2, es decir, son canastas factibles. Entonces, la función de bienestar social debería reaccionar en la misma dirección, o al menos, no opuesta a los cambios en los valores de utilidad obtenidos por los individuos. Es decir, W^{soc} aumenta si se aumenta las utilidades de los individuos.

Condición 2 – si un estado de la economía ***a*** considerado social aumenta y no cae en el ordenamiento de cada uno de los individuos sin cualquier otro cambio en los ordenamientos, y si ***a*** era preferido antes del cambio, para cualquier otro estado, luego ***a*** será preferido también después del cambio.

Condición 3 – suponga dos conjuntos de ordenamientos individuales R_1 y R_2, y R_1' y R_2'. Además, suponga que S es el conjunto de esas alternativas. Y si suponemos también que para ambos individuos y todas las alternativas ***a***, ***b*** en S, que aR_ib solo sí $aR_i'b$. Luego, la elección social hecha a partir de S es la misma si el ordenamiento individual es R_1 y R_2 ó R_1' y R_2'. Esta es la condición más controversial de Arrow, la independencia de alternativas irrelevantes. Por ejemplo, suponga las siguientes preferencias individuales aR_ibR_ic, con una elección para tres candidatos a, b, c. Si muere el candidato c, ¿esperaríamos que se cumpliera aR_ic?. En cambio, ¿deberíamos esperar un ordenamiento de la función de bienestar social de cualesquiera dos alternativas no sea afectado por la adición o remoción de alguna de las alternativas?.

Condición 4 – la función de bienestar social no debe ser impuesta.

Condición 5 – la función de bienestar social no debe ser dictatorial.

Las conclusiones 4 y 5 de Arrow son impuestas para afirmar que las preferencias individuales importan. Es decir, los valores de los individuos se deben contar en la determinación de la función de bienestar social.

En resumen, una Función de Bienestar Social puede ser encontrada si se supone que:

- Universalidad: Dominio de las decisiones no sea restringido.
- Principio de Pareto sea aplicable.
- No exista un Dictador.
- Se asume que el ordenamiento es independiente de las alternativas irrelevantes.

La función de bienestar social no debe ser impuesta dictatorialmente, si se impone bajo este esquema, para algún par de alternativas a y b, se tendría aRb para cualquier conjunto de ordenamientos individuales R_1 y R_2, que es irrespectiva del ordenamiento R_1, R_2, donde R es el ordenamiento social correspondiente a R_1, R_2.

Una función de bienestar social es dictatorial si existe un individuo i tal que para todo a y b, aR_ib implica aRb sin considerar los ordenamientos de todos los individuos deferentes a i, donde R es el ordenamiento de las preferencias sociales correspondiente al R_i-esimo ordenamiento.

Al final, según Arrow cualquier función que satisfaga las primeras tres condiciones y ya sea impuesta o dictatorial, cumple con encontrar una forma funcional. Este resultado es muy fuerte y es llamado teorema de posibilidades, sin embargo, en vista de los resultados, mejor le hubiese llamado teorema de imposibilidades (Silberberg, 1978).

Un problema práctico mayor con este enfoque es que siempre bajo axiomas débiles donde se incluye la votación, los costos transaccionales de recolectar los votos o de registrar a todos los individuos con base en cada uno de los resultados de las políticas son prohibitivos.

3. Enfoque de Justicia Social: Bajo este enfoque se argumenta que el enfoque axiomático seguido por Arrow falla debido a que la mayoría de grupos actúan interesadamente prefiriendo eliminar los intereses de los grupos minoritarios. Esta falla puede ser corregida si se consideran aspectos de imparcialidad y de justicia económica.

Este enfoque propuesto por Rawls (1971) sigue la siguiente forma funcional para la función de bienestar social:

$$W = min(U^A, U^B)$$

Para explorar este resultado supongamos el siguiente ejemplo, suponga que la sociedad esta compuesta solamente de tres individuos y se considera un cambio que toma $ 1000 de un individuo para darle $ 300 a cada uno de los otros dos. Si los tres individuos fueran a votar interesadamente conociendo quienes son los beneficiarios, la mayoría votaría en favor del cambio. De otra manera, si la votación se hiciera bajo el escenario de falta de conocimiento acerca de quien debería pagar y quien debería recibir los beneficios (el velo de la ignorancia), entonces, el cambio debería ser rechazado unánimemente.

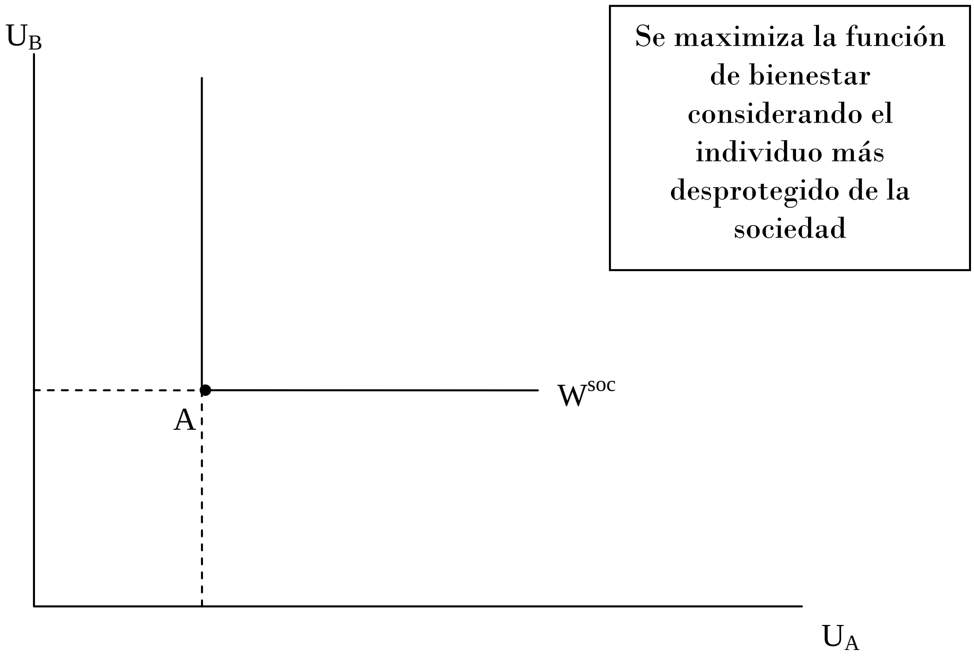


Figura 5: Función de Bienestar Social Rawlsiana.

La anterior forma funcional de la función de bienestar social se obtendría a partir de la función de bienestar con aversión al riesgo cuando el valor de ρ tienda al infinito.

Si queremos utilizar el criterio de Rawls necesitamos medir la utilidad en términos cardinales. Esto lo podemos ver más en detalle a través de un ejemplo. Suponga dos individuos 1 y 2 que tienen que decidir que actividad desarrollar entre dos alternativas, ver un partido de fútbol ó practicar ciclismo.

Tabla 1

Actividad	Ver Partido de Fútbol	Practicar Ciclismo
Individuo 1	0	6
Individuo 2	6	1

Bajo un primer escenario podríamos pensar que la utilidad del individuo 1 es igual a la utilidad del individuo 2. En este caso el bienestar de la sociedad constituida por estos dos individuos se maximiza cuando la actividad elegida es la de practicar ciclismo (7 > 6).

No obstante, también se podría presentar otro escenario en el que la utilidad del individuo 2 valga el doble de la utilidad del individuo 1. Bajo este nuevo escenario, la sociedad ganaría cuando se elige ver el partido de fútbol (12 > 8). Dentro de este análisis existe un problema originado por la presencia de juicios de valor y claramente con el ejemplo anterior se puede comprobar que con la cardinalidad no se resuelve este problema.

En resumen, los esfuerzos por alcanzar una Función de Bienestar Social única no han ganado mucho campo y esta sujeto a grandes contradicciones entre los teóricos de la elección social y los filósofos morales. Por lo tanto, no es generalmente aceptable ni es objetivo hacer comparaciones interpersonales de utilidades que existen.

A pesar de la carencia de un acuerdo en cuanto a la forma específica para la Función de Bienestar Social, se ha recomendado la adopción de una forma específica alternativa para esta función, a la cual ha sido recomendada a través del tiempo por la literatura.

Algunas elecciones de política que estrictamente redistribuyen el ingreso, por ejemplo, la imposición de un impuesto a los ricos para luego asignar estos recursos para los pobres, no puede ser defendida o explicada con otros criterios económicos usados en los procesos de evaluación de políticas.

Siempre que se logre especificar la forma funcional de una Función de Bienestar Social, aparecerá una multitud de problemas prácticos. El enfoque de la Función de Bienestar Social requiere que las utilidades de los individuos sean medidas cardinalmente hasta que las intensidades de las preferencias puedan ser comparadas (Just, Hueth y Schmitz; 2004).

En contraste con este enfoque, Pareto y el criterio de compensación potencial de Kaldor y Hicks solamente asumen que la utilidad puede ser medida ordinalmente. Por lo tanto, la mayoría de las aplicaciones prácticas son alcanzadas siempre que el ordenamiento social asociado con esta, no esté suficiente completo, para identificar un único optimo social o resolver las preguntas de distribución del ingreso.

Apéndice Matemático: Obtención de Diferentes Formas Funcionales para la Función de Bienestar a partir de diferentes valores para el coeficiente de Aversión a la Inequidad, ρ.

Si $\rho = 0$, obtenemos la siguiente forma funcional para la función de bienestar social:

$$W^{soc} = \sum_{j=1}^{n} U_j \Rightarrow W^{soc} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

$$W^{soc} = \left[\sum_{j=1}^{n} U_j^{\,1-\rho} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}$$

$$W^{soc} = \frac{1}{1-\rho} \left[U_1^{1-\rho} + U_2^{1-\rho} + \ldots + U_n^{1-\rho} \right]$$

$$W^{soc} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n \Rightarrow W^{soc} = \sum_{j=1}^{n} U_j$$

En cambio, cuando $\rho = 1$ obtenemos la siguiente forma funcional para la función de bienestar social:

$$W^{soc} = \prod_{j=1}^{n} U_j$$

$$W^{soc} = \left[\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho} \right]^{\frac{1}{1-\rho}}$$

Realizando la transformación logarítmica, tenemos:

$$LNW^{soc} = \frac{1}{1-\rho} LN\left[\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho} \right] \Rightarrow \frac{LN\left(\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho} \right)}{1-\rho},$$

Como $\rho = 1$ queda indeterminado, no se puede dividir por cero, para esto se aplica la regla L'Hôpital:

$$\Rightarrow \frac{LN\left(\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho} \right)}{1-\rho} = \frac{m(\rho)}{n(\rho)},$$

Para aplicar la regla L'Hôpital se deben obtener las derivadas de $\frac{m(\rho)}{n(\rho)} \left(\frac{m'(\rho)}{n'(\rho)} \right)$.

$$\Rightarrow LN\left(\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho} \right) = m(\rho) \Rightarrow m'(\rho) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho}} - \sum_{j=1}^{n} \left(U_j^{1-\rho} LNU_j \right)$$

$$\Rightarrow (1-\rho) = n(\rho) \Rightarrow n'(\rho) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(U_j^{1-\rho} LNU_j \right)}{\sum_{j=1}^{n} U_j^{\;1-\rho}} = \sum_{j=1}^{n} LNU_j,$$

$$\Rightarrow LNW^{soc} = \sum_{j=1}^{n} LNU_j \Rightarrow LNW^{soc} = LNU_1 + LNU_2 + \ldots + LNU_n$$

Transformación de la función logarítmica a lineal.

$$\Rightarrow W^{soc} = U_1 * U_2 * \ldots * U_n \Rightarrow W^{soc} = \prod_{j=1}^{n} U_j$$

Por último, si $\rho = \infty$ se obtiene la siguiente función de bienestar social:

$$W^{soc} = \min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

$$W^{soc}=\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j U_j^{\;1-\rho}\right]^{\frac{1}{1-\rho}} \Rightarrow W^{soc}=\left[\alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_2^{1-\rho}+\ldots+\alpha_n U_n^{1-\rho}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}$$

$$\Rightarrow W^{soc}=\xrightarrow[\rho\to\infty]{LIM}\left[\alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_2^{1-\rho}+\ldots+\alpha_n U_n^{1-\rho}\right]^{\frac{1}{1-\rho}},\ \rho>0, U_1\geq 0, U_2\geq 0,..,U_n\geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 U_1^{1-\rho}\geq \sum_{j=1}^{n}\alpha_j U_j^{\;1-\rho}, asi, \alpha_1^{\frac{1}{1-\rho}}U_1\leq\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j U_j^{\;1-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}},\ \text{entonces } U_1\leq U_2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_2^{1-\rho}\geq \alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_1^{1-\rho}=(\alpha_1+\alpha_2)U_1^{1-\rho}$$

$$\Rightarrow\left(\alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_2^{1-\rho}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\leq(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{1}{1-\rho}}U_1$$

$$\Rightarrow \alpha_1^{\frac{1}{1-\rho}}U_1\leq\left[\alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_2^{1-\rho}+\ldots+\alpha_n U_n^{1-\rho}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}\leq(\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n)^{\frac{1}{1-\rho}}U_1\Rightarrow\rho\to\infty$$

Se obtiene:

$$\Rightarrow\xrightarrow[\rho\to\infty]{LIM}\left[\alpha_1 U_1^{1-\rho}+\alpha_2 U_2^{1-\rho}+\ldots+\alpha_n U_n^{1-\rho}\right]^{\frac{1}{1-\rho}}=U_1,\ \text{porque}$$

$$\xrightarrow[\rho\to\infty]{LIM}\alpha_1^{\frac{1}{1-\rho}}U_1=\xrightarrow[\rho\to\infty]{LIM}\alpha_1^{\frac{1}{1-\rho}}U_1(\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n)^{\frac{1}{1-\rho}}U_1=U_1$$

$$W^{soc}=\min(U_1,U_2,...,U_n)$$

Segundo Criterio: El Criterio de Pareto

De la clase anterior ya sabemos que el pensamiento inicial de Pareto conocido con el nombre de Principio de Pareto es que la sociedad experimenta una mejora en bienestar si por lo menos una persona mejora y ninguna empeora. Ahora en esta sección, nos dedicamos a estudiar el Criterio de Pareto como una prueba para saber sí una política o proyecto nos conduce a un nivel de bienestar mayor para la sociedad.

El Criterio de Pareto, por lo menos, facilita el ordenamiento parcial de políticas alternativas o estados de la economía, bajo un juicio de valor débil. Un estado de la economía Pareto Optimo es aquel el cual nadie puede estar mejor sin que otra persona empeore. Sin embargo, esto no implica justicia económica o equidad en la distribución del ingreso.

Bajo el Criterio de Pareto si es posible hacer que una persona mejore al moverse del un estado A ha un estado B sin que ninguna otra persona empeore, el estado B puede ser registrado como un estado preferido al estado A. Sí este es el caso, un movimiento del estado A al estado B representa una mejora de Pareto, o también se puede decir que el estado B es un Pareto Superior con respecto al estado A.

Como un ejemplo, suponga que una nueva tecnología resulta en una baja en el precio de los alimentos y al mismo tiempo no causa ningún daño por riesgo a la salud o por generación de desempleo. Por consiguiente, la introducción de la tecnología es una mejora de Pareto. Para decidir sobre lo que la sociedad considera como un cambio que implica una mejora de Pareto es necesario el empleo de juicios de valor.

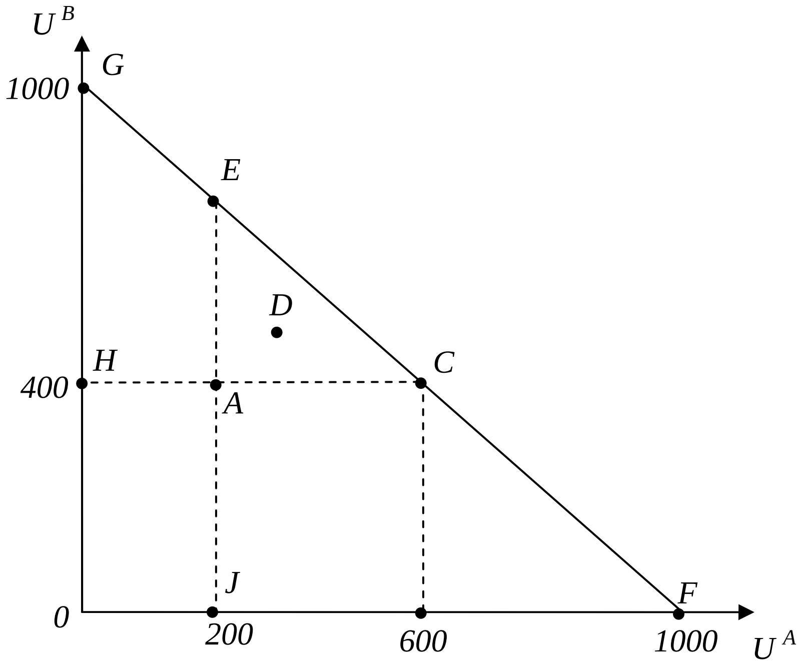


Figura 6: El Criterio de Pareto

Si se encuentra que un estado no puede generar más mejora desde el punto de vista del criterio de Pareto, decimos que es un óptimo de Pareto. Es decir, un estado óptimo de Pareto es definido como un estado a partir del cual ninguna persona puede mejorar sin hacer que otra persona empeore. La optimalidad de Pareto, sin embargo, de ninguna manera implica justicia económica o igualdad en la distribución. Con la optimalidad de Pareto es posible un alto sesgamiento de la distribución del ingreso.

También se debe tener en cuenta que si la economía no es un óptimo de Pareto existe automáticamente ineficiencia económica. Si el producto es divisible, entonces, teóricamente cada uno de los individuos pueden estar mejor al movernos de una posición Pareto inferior a una posición Pareto superior. Por consiguiente, la optimalidad de Pareto esta asociada a la eficiencia económica y el criterio de Pareto es llamado criterio de eficiencia. La eficiencia, en este contexto, esta asociada con las ganancias tanto como sea posible para la sociedad a partir de unos recursos limitados. Note, sin embargo, que el Criterio de Pareto también puede ser usado para comparar dos estados ineficientes. Es decir, un estado ineficiente puede representar una mejora de Pareto por encima de otro estado ineficiente.

Pasar del estado A al estado C, pasa el test del criterio de Pareto. El estado C es un Óptimo de Pareto, es un primer mejor en términos de política económica. También el estado de la economía D representa una mejora potencial en el sentido de Pareto. El área definida por los puntos 0HAJ son estados de la economía Pareto inferiores (cualquier movimiento del estado A hasta cualquier estado bajo esta área implica un empeoramiento en bienestar), el área definida por los puntos AEC son estados de la economía Pareto Superiores (cualquier movimiento del estado A a cualquier estado bajo esta área implica una mejora en bienestar). El área definida por los puntos GEAH y el área definida por los puntos JACF son estados no comparables a través del Criterio de Pareto, por que cualquier movimiento del estado A cualquier estado bajo estas dos áreas, necesariamente produce una perdida en bienestar para alguno de los individuos.

En la figura 7 se presentan las diferentes áreas (conjuntos de estados) estudiados bajo el criterio de Pareto.

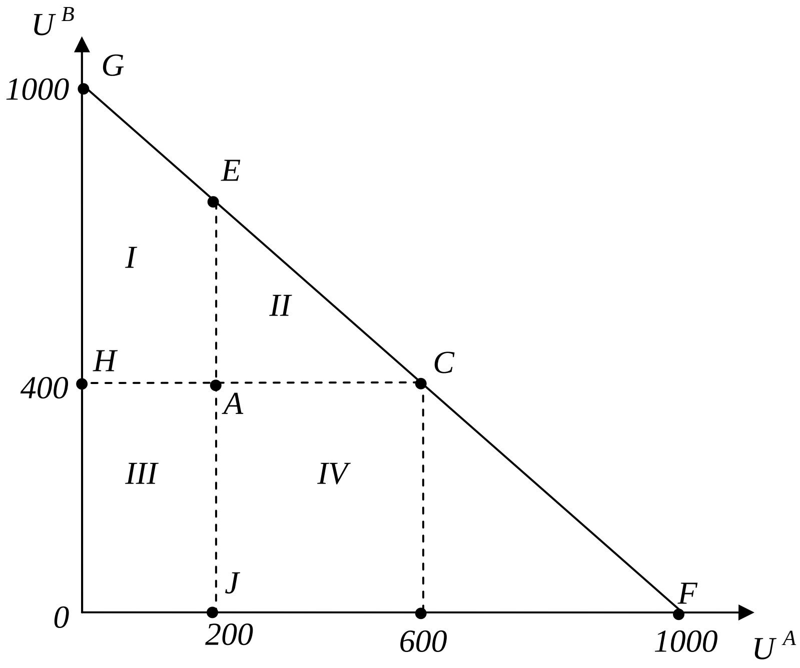


Figura 7: Estados Pareto Superiores, inferiores y no comparables

Como se aprecia en la anterior figura, las áreas I y IV representan estados no comparables por el Criterio de Pareto, mientras que el área II incluye a todos los estados de la economía considerados Pareto superiores y el área III contiene a todos los estados de la economía Pareto inferiores.

Bajo el criterio de Pareto se tiene la restricción de que no se pueden evaluar políticas que generen cambios en los estados de la economía que hagan que algún individuo de la sociedad pierda. Esta es una limitación sería del criterio por que se reduce el conjunto de estados de la economía para la comparación al tener estas dos regiones no comparables por el criterio de Pareto.

El problema de limitar el conjunto de estados para la comparación consiste en que gracias a que el criterio no acepta perdedores, limita el conjunto de estados para la comparación. Puede que en las áreas en donde se tienen estados Pareto no comparables existan cambios que sean factibles en términos de alcanzar mejoras en el bienestar, sin embargo, debido a la limitación del criterio no es posible saber la conveniencia o no de ejecutar alguna política que produzca un cambio en estas áreas.

Además de este problema, el criterio de Pareto sigue sin dar solución al problema de las comparaciones interpersonales y bajo esta herramienta tampoco se podría evaluar todo el universo de estados de la economía derivado del problema de no aceptar perdedores.

El Óptimo de Pareto y el Equilibrio Competitivo

Al analizar si la economía ha alcanzado un estado que es un óptimo de Pareto, es importante tener en cuenta primero que sin la intervención del Gobierno a través de políticas, regulaciones y proyectos, la única forma en que la economía alcance este estado es a través del cumplimiento de dos teoremas que garantizar dicho objetivo. Estos teoremas son conocidos con el nombre de los teoremas fundamentales de la economía del bienestar.

Primer Teorema: si los individuos y las firmas actúan en un mercado de competencia perfecta, existen mercados completos (los precios son públicos) y hay información perfecta, entonces, un equilibrio competitivo, cuando existe, es eficiente en el sentido de Pareto.

Es decir, cuando existe un equilibrio competitivo se alcanza un Óptimo de Pareto. Esto esta condicionado a que no existen externalidades que generen un fallo de mercado y rompan el equilibrio competitivo.

Segundo Teorema: si los mapas de curvas de indiferencia y los conjuntos de producción son convexos, si existen mercados completos e información perfecta y si se pueden adoptar transferencias entonces cualquier asignación Pareto eficiente se puede alcanzar con redistribuciones apropiadas de riqueza.

A partir de lo anterior lo clave en esta discusión es que para alcanzar un óptimo de Pareto debe existir necesariamente un equilibrio competitivo en la economía, esto implica que en la economía se tenga un óptimo en el consumo y un óptimo en la producción, lo que generaría una tercera condición suficiente que sería un óptimo en el producto combinado. Estas condiciones sólo se cumplen cuando se tiene un equilibrio competitivo[9].

Aquí es importante considerar la Ley de Wallras que nos dice que un exceso de demanda igual a cero, implica que los mercado están vaciados (se produce exactamente la misma cantidad que se demanda). Es decir, si tenemos m mercados en la economía, sí tenemos m -1 mercados en equilibrio, entonces, el m-ésimo mercado también estará en equilibrio.

Eficiencia en el Consumo

La eficiencia en el consumo, se alcanza cuando las tasas marginales de sustitución por cualquier par de bienes son iguales entre todos los individuos. Esto implica una tangencia en las curvas de indiferencia en utilidad de los agentes.

[9] Es un conjunto de precios de bienes e insumos tal que la oferta es igual a la demanda.

$$TMS^{A}_{q1q2} = TMS^{B}_{q1q2}$$

Eficiencia en la Producción

La optimalidad de Pareto en la producción implica que la tasa de sustitución técnica entre cualquier par de insumos es la misma en la producción de todos los productos usando ambos insumos.

$$TMST^{q1}_{x1x2} = TMST^{q2}_{x1x2}$$

Eficiencia en el Producto Combinado

Si usamos la Frontera de Posibilidades de Producción para comparar los puntos eficientes de producción podemos averiguar estados de eficiencia en la producción para luego relacionarlos con los puntos de eficiencia en el consumo y poder encontrar el óptimo de Pareto de la economía.

Un óptimo de Pareto se obtiene cuando alcanzamos un equilibrio competitivo. Es decir, cuando:

$$TMST^{A,B}_{q1q2} = TMST^{q1,q2}_{x1x2} = TMT_{q1q2}$$

Donde, C es la curva de indiferencia de Scitovsky, una curva de Scitovsky representa todos aquellos puntos con el mismo nivel de bienestar social. Una curva de indiferencia de Scitovsky (CIS) tangente a la Frontera de Posibilidades de Producción (FPP) implica que hemos alcanzado un óptimo de Pareto en donde las ganancias en Bienestar de la Sociedad son las Máximas.

Para que se cumpla la anterior condición se debe cumplir estrictamente la condición de existencia de un equilibrio competitivo. En la siguiente figura se muestra la relación gráfica entre el equilibrio competitivo y el óptimo de Pareto para dos bienes $q = q_1, q_2$.

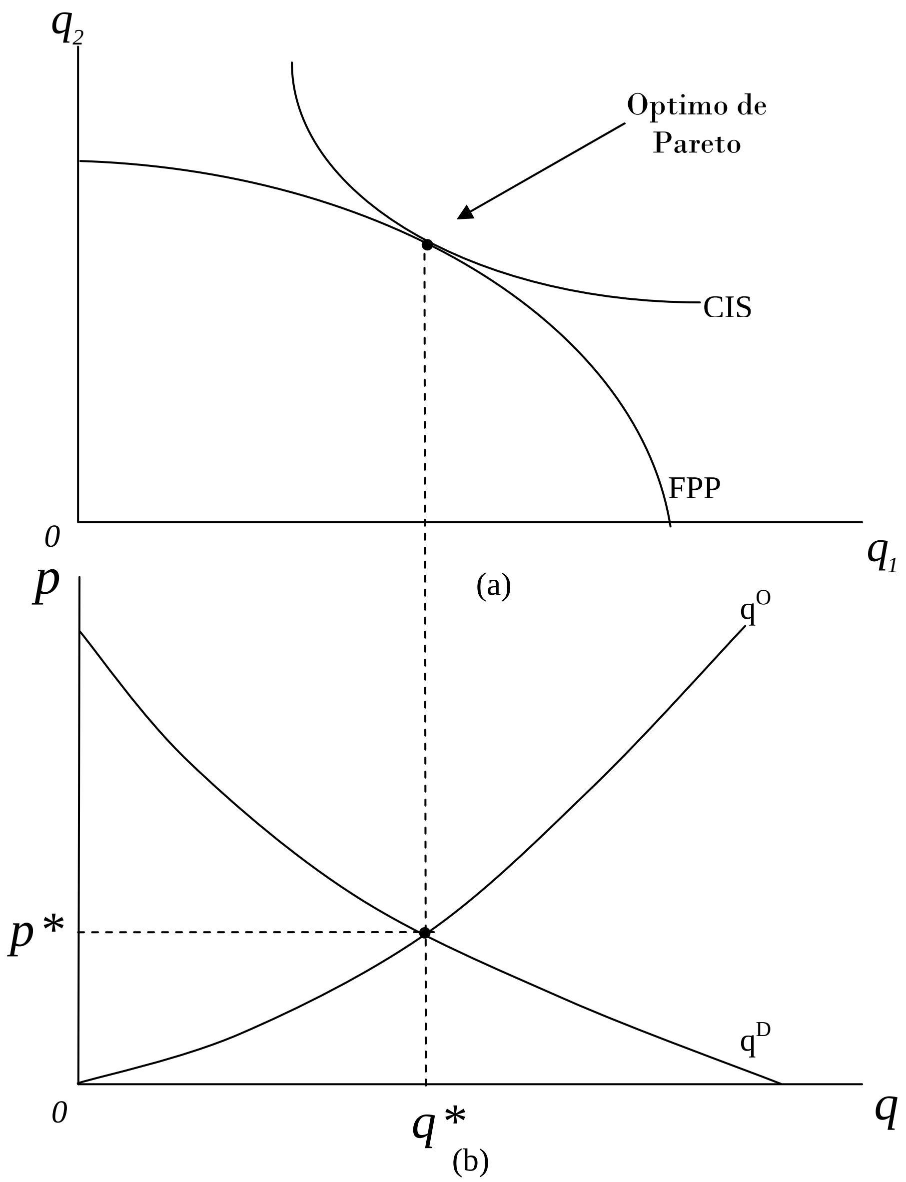


Figura 8: Optimo de Pareto y Equilibrio Competitivo

Tercer Criterio: Criterio de Compensación Potencial de Kaldor y Hicks

Este criterio nos dice que si al pasar de un estado de la economía inicial "A" a uno final "B", y si las ganancias de los ganadores son tan grandes como para compensar a los perdedores (y que los primeros sigan aún en una mejor situación), se dice que ese cambio (esa política) es aprobado a través del criterio Kaldor Hicks. Es decir, el estado B es preferido al estado A. Este criterio se puede interpretar como un esfuerzo por ampliar el criterio de Pareto.

La compensación de la que habla Kaldor y Hicks es potencial, es decir, en términos teóricos no se hace, en términos empíricos la compensación efectiva de los perdedores queda en función de los juicios de valor de los políticos que toman las decisiones. En la siguiente figura se puede apreciar como funciona este criterio.

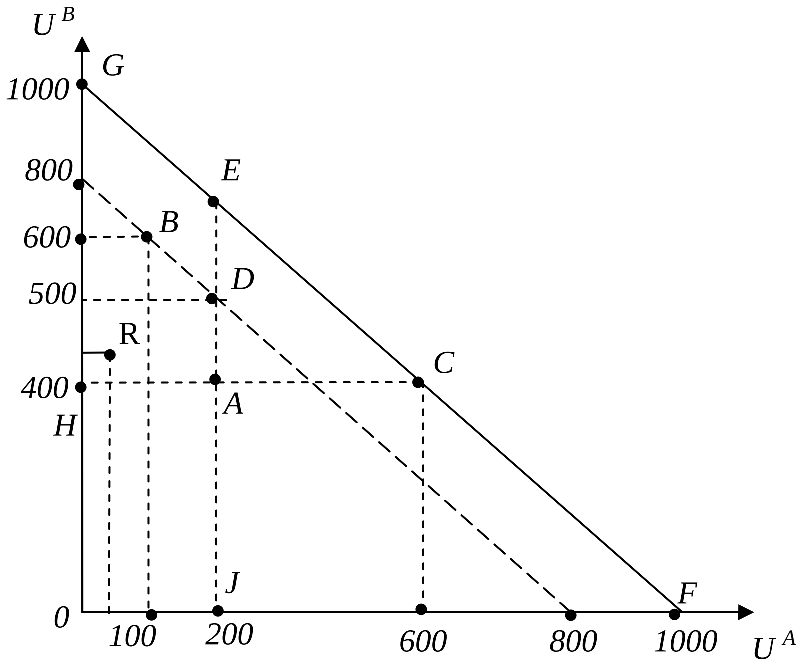


Figura 9: El Criterio de Compensación Potencial de Kaldor y Hicks

Con el criterio de Compensación potencial de Kaldor Hicks, los estados de la economía incluidos en las áreas Pareto no comparables (área GEAH y área JACF) sí se pueden comparar. Pasar del estado A al estado B pasa el test del criterio de compensación potencial de Kaldor – Hicks. Podemos desplazarnos del estado B al estado D a través de una nueva redistribución y lograr que el individuo A quede indiferente con el cambio, mientras que el individuo B aún quedaría en una mejor situación. Con este criterio se aumenta el número de estados para la comparación debido a que ahora sobre las áreas definidas por los puntos GEAH y JACF se tienen estados de la economía viables a partir de criterio de compensación potencial de Kaldor Hicks (este es el caso del estado B), que antes no eran factibles bajo el criterio de Pareto.

Un último análisis que vale la pena desarrollar es el relacionado con un movimiento del estado A (status quo) al estado R (con política). Suponga que este movimiento hace que el individuo A pierda 70 y que el individuo B gane 40. En este caso los beneficios de los ganadores no son tan grandes como para compensar a los perdedores y aún continuar mejor. Teniendo en cuenta que en términos teóricos, la compensación es potencial, este cambio no se llevaría a cabo. En términos empíricos, si hacemos un análisis costo beneficio muy seguramente una situación similar a esta arrojaría como resultado unos beneficios netos en valor presente negativo, lo cual brindaría la señal de que ese cambio no pasa el criterio de compensación potencial Kaldor Hicks y que por lo tanto dicho movimiento no se recomienda por que no le traería ganancias a la sociedad.

Adicionalmente, si estamos pensando en ordenar estados (equivalente a ordenar políticas) y si seguimos con el ejemplo anterior y nos enfocamos en ordenar los estados B y R, llegamos a la conclusión que la política que induce el movimiento de A hasta B es preferida a la política que induce un movimiento del estado A al estado R. Esto por que en el caso de la primera política se están produciendo beneficios netos positivos y con la otra política no.

Al final, entonces es muy importante tener en cuenta que el criterio de compensación potencial de Kaldor y Hicks al igual que el resto de criterios que estamos estudiando tienen como finalidad la comparación de estados, y que un resultado de esa comparación es brindar una conclusión que nos diga si vale la pena para la sociedad que se produzca el cambio inducido por la política o no.

Tener claridad sobre este punto es clave para entender, por ejemplo, que se puede comparar el estado A con el estado B, y se puede comparar el estado A con el estado R, y que dichas comparaciones pueden brindar conclusiones diferentes. Bajo la primera comparación si se recomienda el cambio (la política que lo induce) y bajo la segunda comparación la conclusión es que el cambio no se recomienda si lo que buscamos es mejorar el bienestar de la sociedad.

Un primer problema de este criterio presente desde el punto de vista teórico es que después de la compensación de los ganadores a los perdedores, bajo otra redistribución de ingreso, los perdedores pueden sobornar a los ganadores para que el proyecto no se lleve a cabo. Este resultado es conocido con el nombre de Paradoja de Scitovsky o Paradoja de Reversibilidad. Bajo este resultado existe indiferencia entre el estado inicial (sin política) y el estado final (con política).

La paradoja de Scitovsky ocurre solamente cuando estamos comparando dos estados de la economía segundo mejor y esta no siempre ocurre si al hacer esa comparación, se asegura que la compensación no sea pagada.

La solución a este problema se conoce con el nombre de Criterio de Compensación Potencial Kaldor Hicks Scitovsky. La política que conduce al estado B es preferida al estado A (status quo) solamente si los ganadores pueden compensar a los a perdedores para que acepten el cambio y los perdedores no puedan sobornar a los ganadores para que no se haga el cambio. Este criterio de bienestar potencial luego es ampliado por Samuelson.

También el criterio de compensación potencial de Kaldor y Hicks presenta el problema de intransitividad, Gorman (1953). Este autor extiende el análisis realizado por Scitovsky para demostrar la existencia de intransitividad asociado con el ordenamiento de más de tres estados. La solución a éste problema la provee Samuelson a través de su criterio de bienestar potencial.

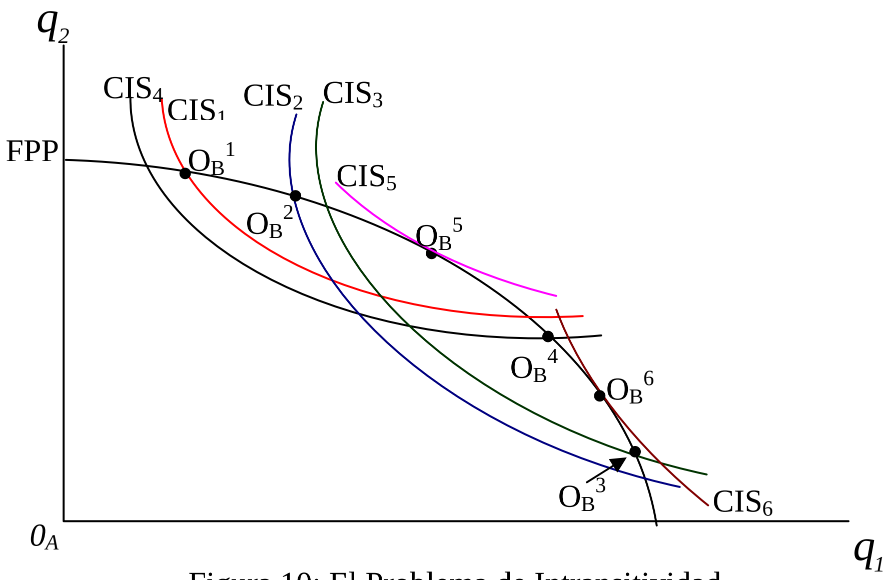


Figura 10: El Problema de Intransitividad

A pesar de las debilidades teóricas de este criterio, el criterio de compensación potencial de Kaldor y Hicks en la base teórica del análisis costo beneficio en política pública practicado hoy en día.

Cuarto Criterio: Criterio de Bienestar Potencial de Samuelson.

Este es un enfoque relacionado con la elección de diferentes alternativas de distribución del ingreso y el problema de reversibilidad basado en el concepto de frontera de posibilidades de utilidad introducido por Samuelson.

El pensamiento de Samuelson es que si uno considera todas las posibles canastas de producción obtenidos a partir de una frontera de posibilidades de producción y todas las posibles distribuciones de estas canastas que corresponde a diferentes fronteras de posibilidades de utilidad, luego a partir de considerar (problema de reversibilidad) que estas fronteras se cruzan, podemos pensar en una gran frontera de posibilidades de utilidad que sea como una envolvente del conjunto de fronteras de posibilidades de utilidad. Todos los puntos (estados de la economía) sobre esta curva serían estados primeros mejores "óptimos", y serían puntos a partir de los cuales se puede alcanzar tangencia en con la curva de indiferencia de Scitovsky.

Este criterio si bien brinda una solución en términos teóricos, en la parte empírica no es muy prometedor. Son muy pocas las situaciones que se podrían comparar con este criterio. Por ejemplo, cambio tecnológicos o descubrimientos de yacimientos de petróleo. Nos obstante, la gran mayoría de situaciones reales en la que se puede aplicar los análisis de bienestar no tiene que ver con esto. Por ejemplo, construcción de una carretera o de un puente, un aeropuerto, políticas de salud, educación, etc.

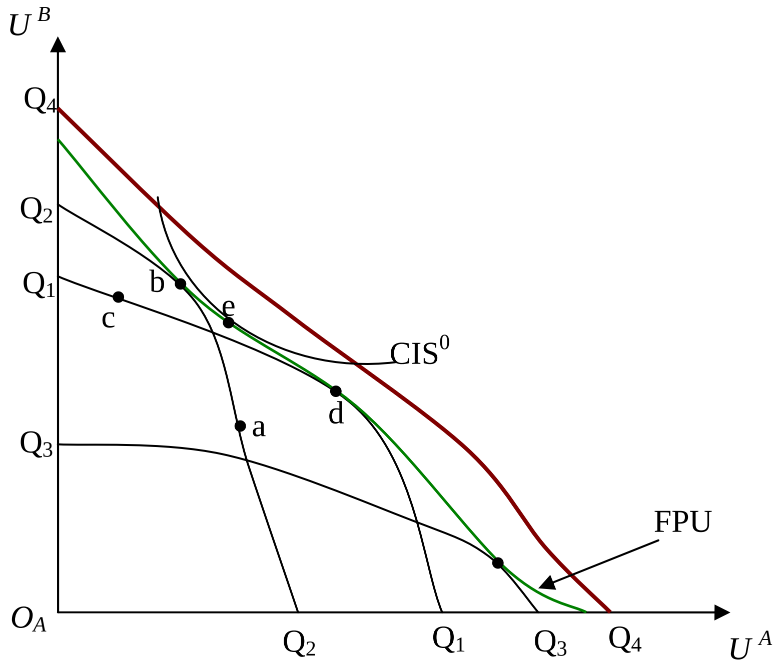


Figura 12: Criterio de Bienestar Potencial de Samuelson

Una vez estudiados los criterios de elección de políticas entramos al tema de medición del bienestar del consumidor.

Medición del Bienestar del Consumidor

En esta parte del curso estamos interesados en avanzar en el componente de medición del bienestar dado que ya sabemos la importancia de los "Criterios de Elección de Políticas" y tenemos una conclusión contundente: el criterio para elegir políticas que mejoren el bienestar de la sociedad es el Criterio de Compensación Potencial de Kaldor y Hicks. Este criterio también llamado criterio de eficiencia pura es la base del análisis costo beneficio moreno practicado hoy en día por los evaluadores de políticas y proyectos públicos.

Ahora el interés se centra en la medición del bienestar del consumidor que puede cambiar por varias razones: (1) cambios en los precios de los bienes que consume el individuo, (2) cambios en el ingreso que limita el proceso de elección del individuo de la canasta de bienes que maximiza su utilidad y (3) cambios en cantidades de recursos exógenos para el consumidor, como por ejemplo, cambios en las dotaciones de bienes públicos puros (como calidad del aire) y bienes producidos exclusivamente por el Gobierno como defensa nacional, educación pública, salud pública e infraestructura de transporte, entre otros. (4) Desastres Naturales tales como terremotos, huracanes, tsunamis, etc.

Referente a la primera causa, existen varias razones para tener interés sobre los cambios en precios. Una de estas radica en que los cambios en precios pueden generar efectos en el bienestar de los consumidores y productores, lo cual obviamente origina una serie de cambios en el nivel de satisfacción de la sociedad. Los cambios en precios pueden provenir principalmente de tres fuentes: Primero, los cambios en precios pueden provenir de las medidas de política que pueda emprender el Gobierno y que básicamente producen precios diferentes al precio real que refleja con exactitud el costo marginal del bien. Como ejemplos de estas medidas de política se pueden citar a los esquemas de impuestos o subsidios en determinados sectores de la economía que impiden que los consumidores y productores transen los bienes a su verdadero valor.

Otra razón para que cambien los precios son las innovaciones tecnológicas, este es el caso de las tecnologías limpias y de punta, las cuales provocan cambios en los niveles de precios iniciales de los bienes que ofrecen las empresas mediante cambios en la producción o por medio de la reducción de la cantidad de insumos utilizados en el proceso de producción. Por ejemplo, en la industria de producción de papel en donde la adquisición de maquinas con mayor tecnología hace que se produzca una mayor cantidad de papel utilizando la misma cantidad de insumos del proceso de producción original. Bajo el supuesto de que la firma puede influenciar el precio de mercado, el cambio en el proceso de producción de esta empresa muy seguramente provocará el cambio de precio del bien en el mercado repercutiendo directamente sobre el bienestar de productores y consumidores[1].

---

[1] Si la firma en que se produce el cambio tecnológico esta bajo condiciones de competencia perfecta, luego las ganancias del cambio tecnológico pueden llegar hasta los consumidores. En cambio, si la firma produce bajo un esquema de monopolio, las ganancias del cambio tecnológico no alcanzan a beneficiar a los consumidores.

Por último, los precios pueden cambiar a través de la presencia de eventos exógenos no esperados que causan trastornos en la periodicidad que sigue la producción de ciertos bienes. Esto es muy común para el caso de los bienes agrícolas donde los eventos climáticos no esperados, como por ejemplo, el fenómeno de niño, o el problema de calentamiento global y variación del clima alrededor del mundo, específicamente los casos de heladas o sequías, traen con sigo problemas de disponibilidad de bienes de consumo para la sociedad originando escasez que se manifiesta en los mercados en términos de cambios en los precios de los bienes y, por consiguiente, en cambios en el bienestar de los productores y consumidores.

Al final, todos los cambios de precios independientemente de cual sea su causa pueden traer consigo impactos significativos sobre el bienestar de la sociedad. Es ahí donde radica la importancia de estudiar cuidadosamente las medidas de bienestar con el objetivo de poder estimar tales impactos y así poder obtener evidencia empírica que pueda ayudar a los tomadores de decisiones de política a elegir la mejor alternativa con el objetivo de minimizar los impactos en el bienestar generados a partir de los cambios en precios.

La idea de utilizar la interpretación de Marshall para cuantificar los cambios en el bienestar del consumidor proviene de la escuela de Chicago. Los premios nobel de la escuela de Chicago son Milton Friedman (1976), Theodore Schultz (1979), Ronald Coase (1991), Gary Becker (1992), Robert Fogel (1993), James Heckman (2000). Uno de los principales precursores del Análisis Costo Beneficio en la evaluación de políticas públicas es el famoso economista de Chicago Arnold Harberger. Esta línea de pensamiento es alterna a la del enfoque utilizado por la escuela Keynesiana de trabajar más utilizando el enfoque de equilibrio general.

Cuando la disposición a pagar marginal supera el costo de oportunidad representado por la disposición a aceptar marginal del productor del bien el mercado esta recibiendo la señal de que la sociedad necesita más de ese bien. Luego, los precios de mercados pueden servir de señal para saber que desea la sociedad en términos de bienes y servicios y en qué cantidad y calidad. Al suplir estas necesidades en la sociedad estaríamos alcanzando una mejora potencial en el sentido de Pareto.

Pasando ahora al tema de medición tenemos que recurrir a la teoría básica del consumidor para plantear alguna forma de medición de los cambios en utilidad. Como se dijo anteriormente, los cambios en los precios, en el ingreso y en cantidades actúan sobre los niveles de precios de los bienes en la economía que reflejan el grado de escasez de los recursos. Si tenemos en cuenta esto podríamos decir que un cambio en utilidad de un consumidor representativo se podría ilustrar como:

$$\Delta U = U(q^1) - U(q^0)$$

Como el lector sabrá de sus cursos de microeconomía el problema con este enfoque es que la utilidad es un concepto no observable y, por consiguiente, no cuantificable. Esto imposibilitaría llegar a obtener una medida del cambio en el bienestar del consumidor en términos cuantitativos. Además, como mencionamos al inicio de esta sección, los cambios en bienestar se derivan de cambios en los precios y el ingreso, por ende, necesitamos una función o funciones que nos ayuden a expresar los cambios en bienestar del consumidor en términos de cambios en los precios y en el ingreso.

Luego, antes de iniciar con el estudio de las diferentes metodologías de medición del cambio en el bienestar del consumidor, arrancaremos con el estudio de algunos conceptos de mucha utilidad procedentes de la teoría del consumidor.

Un primer concepto de importancia son las preferencias del consumidor. Este es el concepto base que da lógica al proceso de generación de valores que luego estudiamos a través del concepto de disposición a pagar. Sabemos que el individuo en correspondencia con sus preferencias elige una canasta con un conjunto de bienes que le permite maximizar su bienestar.

Si el consumidor puede jerarquizar todas las canastas de consumo disponibles podríamos encontrar el óptimo del consumidor y a partir de ahí hacer los análisis de bienestar en términos de los cambios en el óptimo cuando cambian los precios y el ingreso.

Existen una serie de conceptos útiles a la hora de estudiar el tema de preferencias, estos son: (1) preferencias estrictas, (2) indiferencia en las preferencias y (3) preferencias débiles. Partiendo del supuesto de que el individuo prefiere la canasta A más que la canasta B. Podemos decir que la canasta A es estrictamente preferida a la canasta B cuando $(q_1^0, q_2^0) > (q_1^1, q_2^1)$. En cambio, si el individuo es indiferente entre elegir la canasta A o la canasta B lo podemos expresar como $(q_1^0, q_2^0) \sim (q_1^1, q_2^1)$. Por último, tenemos la preferencia débil que significa que el individuo puede preferir una canasta a otra o ser indiferente a ambas, esto se representa como $(q_1^0, q_2^0) \geq (q_1^1, q_2^1)$.

Para que el individuo pueda alcanzar un óptimo que le permita maximizar su utilidad necesitamos que, en la medida de lo posible, las preferencias del consumidor sean estrictas, esto garantizaría la jerarquización de las diferentes canastas de bienes y evitaría problemas de intransitividad.

De todas maneras, para formalizar la teoría de preferencias y lograr que esta tenga consistencia se plantean un conjunto de axiomas que funcionan como supuestos a seguir en esta teoría. Para que las preferencias sean consistentes con el comportamiento del consumidor se debe tener en cuenta que:

1. *Las preferencias sean completas*: Los consumidores pueden comparar y ordenar todas las canastas de bienes posibles. Esto significa que al momento de tomar una decisión el individuo tiene que ser capaz de ordenar todas las alternativas que se le presentan. Supongamos que el individuo tiene que tomar una decisión entre (q_1^0, q_2^0) y (q_1^1, q_2^1). Este axioma supone que el individuo puede: $(q_1^0, q_2^0) > (q_1^1, q_2^1)$ es decir, una decisión del consumidor puede ser elegir preferir la canasta A en vez de la canasta B. De otra forma, el podría preferir la canasta B en vez de la canasta A, (q_1^1, q_2^1), $> (q_1^0, q_2^0)$.

Por consiguiente, el consumidor puede elegir una u otra canasta, de esta manera ordena todas las alternativas que estén disponibles. Este axioma se presenta en la mayoría de decisiones económicas. No obstante, pueden darse inconsistencias, por ejemplo, la decisión de Sophie, consiste en que el individuo no necesariamente entiende la decisión que esta tomando (Amartya Sen). En el tiempo de los nazis, Sophie tiene que decidir entre cual de sus dos hijos tiene que ir a la cámara de gas.

2. *Las preferencias sean transitivas*: Si tenemos tres canastas de bienes A con (q_1^0, q_2^0), B con (q_1^1, q_2^1) y C con (q_1^2, q_2^2); y si:

La canasta A es preferida a la canasta B, $(q_1^0, q_2^0) > (q_1^1, q_2^1)$.
Y luego, la canasta B es preferida a la canasta C, $(q_1^1, q_2^1) > (q_1^2, q_2^2)$.
Entonces, la canasta A es preferida a la canasta C, $(q_1^0, q_2^0) > (q_1^2, q_2^2)$.

Es decir, los consumidores eligen de manera consistente. Este supuesto es bastante restrictivo. La economía experimental ha demostrado que en algunos casos es posible que la transitividad no se cumpla. En este caso, tenemos:

$$(q_1^2, q_2^2) > (q_1^0, q_2^0) > (q_1^1, q_2^1) > (q_1^2, q_2^2)$$

El axioma de transitividad es necesario para asegurarnos que el consumidor tome sus decisiones de la mejor manera posible.

3. *Las preferencias sean continuas*: Es un supuesto técnico que permite derivar funciones de utilidad continuas. Si el individuo revela que la canasta A es preferida a la canasta B, luego en caso de sustitución el individuo elegiría o preferiría la canasta A en vez de la canasta B.

El siguiente paso para avanzar en la medición del bienestar del consumidor es considerar la existencia de un conjunto de funciones de mucha utilidad para expresar los cambios en bienestar. Estas funciones se obtienen directamente de la especificación del problema primal y dual del consumidor.

El objetivo del problema primal es obtener las demandas Marshallianas (llamadas también demandas no compensadas) que son las cantidades óptimas que maximizan la utilidad del consumidor bajo el problema de maximización de utilidad restringido. Por otra parte, bajo el problema dual se busca obtener las demandas Hicksianas, que también son cantidades óptimas y nos permiten alcanzar el óptimo para el consumidor. En términos gráficos estos problemas se presentan en la figura 10.

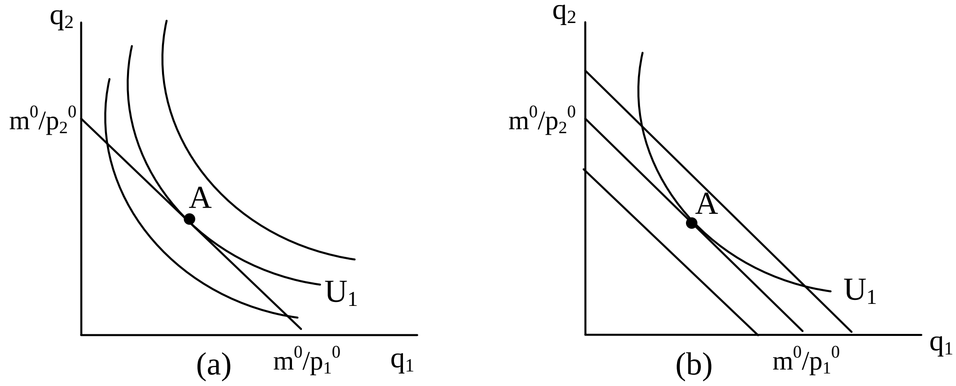


Figura 10: El Problema Primal y Dual en Gráficos.

En la figura 10 se observa, en la parte (a) el esquema propuesto para la maximización de utilidad y en la parte (b) el esquema para la minimización del gasto, ambos para un consumidor representativo. En la parte (a) se observa la existencia de un conjunto de curva de indiferencia, en donde, dado un conjunto presupuestario, en el punto A se maximiza la utilidad. Note que cualquier curva de indiferencia por encima de U_1 es inalcanzable con el presupuesto disponible y cualquier curva de indiferencia por debajo de U_1 no representa un óptimo por que podemos llegar a gastar todo el ingreso disponible para alcanza un mayor nivel de utilidad.

También, en esta misma figura, en la parte (b), se puede observar que el objetivo es poder comprar una canasta de bienes que nos permita alcanzar el nivel de utilidad U_1. Esta curva de indiferencia la alcanza el consumidor con la restricción de presupuesto (m^0/p_2^0, m^0/p_1^0), cualquier restricción de presupuesto por debajo de esta implica un nivel de gasto sub óptimo que no permitirá alcanzar U_1, y cualquier nivel de gasto por encima de (m^0/p_2^0, m^0/p_1^0), representará un gasto excesivo para alcanzar la curva de indiferencia U_1.

Después de haber explicado la intuición del problema primal y del problema dual del consumidor a través de gráficas, el siguiente paso es hacer las respectivas derivaciones matemáticas. Suponiendo que tenemos un vector de bienes $q = q_1, q_2, \ldots., q_n$ y sus respectivos precios $p = p_1, p_2, \ldots., p_n$ y el ingreso representado por la letra m, tenemos:

$$\underset{q^*}{Max}\; U(q)\, sujeto\, a\, m = pq$$

Donde, q* la solución de este problema de maximización implica la obtención de las cantidades óptimas de q (demandas Marshallianas), que maximizan la utilidad del consumidor. Este problema de maximización estático corresponde al problema primal. Por otra parte, el problema dual, que equivale a ver el problema del consumidor, pero desde la otra cara de la moneda, se especificaría de la siguiente manera:

$$\underset{q^*}{Min}\; pq\, sujeto\, a\, \overline{U} = U(q)$$

Donde, $\overline{U}$ es un nivel de utilidad específico que pretende alcanzar el consumidor. La solución de este problema de minimización implica la obtención de las cantidades óptimas de q (demandas Hicksianas), que minimizan el gasto del consumidor sujeto a alcanzar un nivel de utilidad de referencia.

Ahora, para tener un mayor entendimiento acerca de estos dos problemas, encontraremos soluciones suponiendo que el consumidor deriva su utilidad de dos bienes q_1 y q_2 y su compra esta sujeta al ingreso disponible m. Para el caso primal, el problema bajo el modelo que supone sólo la existencia de dos bienes se especifica de la siguiente manera:

$$\underset{q_1*,q_2*}{Max}\ U(q_1,q_2)\ sujeto\ a\ m = p_1q_1 + p_2q_2$$

Recuerde que ahora el problema es encontrar el valor óptimo que maximiza la función objetivo "la función de utilidad", para esto dentro del problema de maximización estática, adicional a las dos variables reales incluimos una tercera (una variable artificial) que pondera la restricción en el problema "la restricción de ingreso".

$$L(q_1,q_2,\lambda) = U(q_1,q_2) + \lambda[m - p_1q_1 - p_2q_2]$$

El Lagrangeano es la ecuación a maximizar, es decir, pasamos de maximizar una función a maximizar una ecuación que incluye la función objetivo y la restricción. Cuando queremos maximizar una función en un problema de restricción, resolvemos los valores críticos obteniendo las condiciones de primer orden (derivando e igualando a cero).

En el problema restringido, la inclusión de λ (el multiplicador de Lagrange), significa que estamos pasando del problema no restringido con dos variables, a un problema restringido con tras variables, donde una de estas variables es λ, una variable artificial. Es decir, pasamos de (q_1*, q_2*) a (q_1*, q_2*, λ).

La nueva variable, λ, tiene un significado económico: representa una medida del valor de la escasez de los recursos en el problema considerado. Otra interpretación de λ es que representa la utilidad marginal del ingreso. Para entender todos aplicamos el teorema de la envolvente sobre el Lagrangeano evaluado en los valores óptimos:

$$L(q_1*,q_2*,\lambda*) = U*(q_1,q_2) + \lambda*[p_1q_1 + p_2q_2 - m]$$

Como la utilidad es evaluada en el óptimo significa que tenemos la función de utilidad indirecta:

$$L(q_1*,q_2*,\lambda*) = V(p_1,p_2,m) + \lambda*[p_1q_1 + p_2q_2 - m]$$

Luego, derivo el Lagrangeano evaluado en los valores óptimos con respecto al ingreso:

$$\frac{\partial L}{\partial m} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial V(p_1, p_2, m)}{\partial m}$$

Luego, λ, es la utilidad marginal del ingreso, que puede ser constante o no dependiendo si el cambio en el ingreso genera un cambios en las cantidades demandadas o no. Veamos esto en la siguiente figura 11:

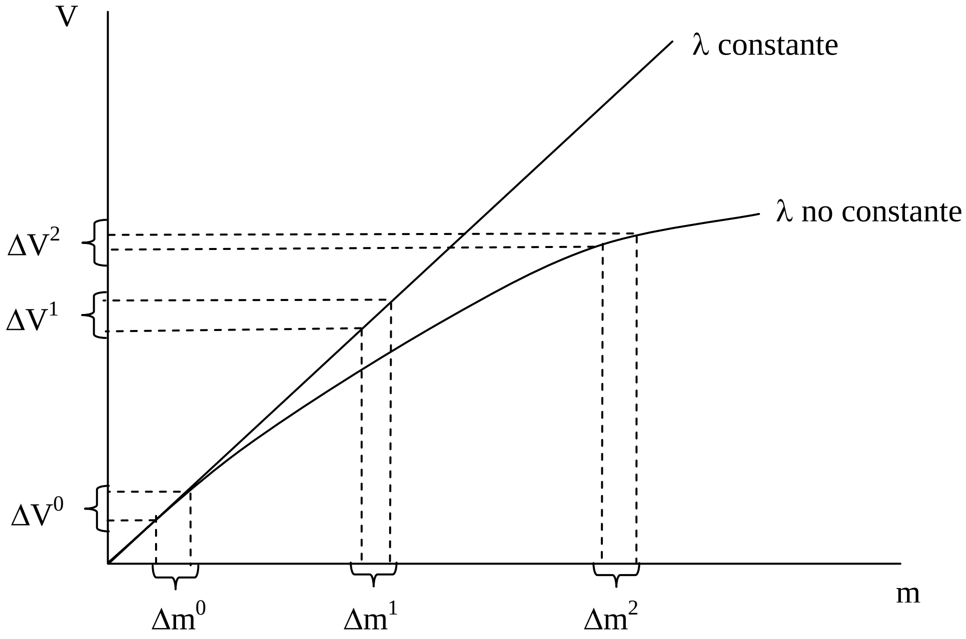


Figura 11: Utilidad Marginal del Ingreso Constante y No Constante frente a Cambios en el Ingreso

En la anterior figura puede observar como cuando λ es constante, cualquier cambio en el ingreso genera el mismo cambio en utilidad (ΔV^0 y ΔV^1 son iguales), esto es importante para la medición del bienestar del consumidor y sobre todo si tiene en cuenta que a partir de los resultados del modelo para el consumidor representativo tenemos que llegar a la agregación del bienestar de todos los consumidores que sean impactados por los cambios en precios. Mientras, que cuando λ es no constante, esto no ocurre (ΔV^0 es diferente de ΔV^2), esto dificultaría pasar de una medida de beneficios individual del consumidor a una agregación del bienestar de los consumidores derivados de cambios en el ingreso.

Retornando al problema primal del consumidor, el objetivo principal de éste es encontrar las condiciones de primer orden que permiten encontrar una solución en términos de las cantidades óptimas (que maximizan la utilidad) de los bienes 1 y 2. Es decir, en un momento en el tiempo necesitamos conocer cuáles son las cantidades de q_1 y de q_2 que maximizan la utilidad del individuo dado que enfrenta una restricción de ingreso.

Para tal fin debemos encontrar las condiciones de primer orden del problema de maximización. Por condición de primer orden se entiende encontrar la primera derivada con respecto a las variables especificadas en la ecuación del Lagrangeano (q_1, q_2 y λ). Donde, q_1 y q_2 son variables reales y λ es una variable artificial que representa el ponderador de la restricción en el problema de maximización.

Igualamos la derivada a cero con la finalidad de encontrar un valor óptimo que es un óptimo global, no local. Una vez explicadas estas particularidades, las condiciones de primer orden se representan como:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_1} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_1} = \lambda p_1$$

La cantidad óptima del bien 1 que elige el consumidor, se obtiene cuando la utilidad marginal de consumir la última unidad de q_1 se iguala con su costo marginal.

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_2} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_2} = \lambda p_2$$

La cantidad óptima del bien 2 que elige el consumidor, se obtiene cuando la utilidad marginal de consumir la última unidad de q_2 se iguala con su costo marginal.

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \ \Rightarrow m - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$

De la tercera condición de primer orden se obtiene la restricción de presupuesto, que representa la limitación en el poder adquisitivo que limita el proceso de elección del mayor nivel de utilidad.

Las derivadas $\partial U/\partial q_1$ y $\partial U/\partial q_2$, conocidas con el nombre de utilidades marginales, representarían el beneficio marginal del consumidor por una unidad adicional del bien 1 y del bien 2, respectivamente. Luego, la condición de óptimo del consumidor en cuanto a la elección de los bienes 1 y 2 se puede interpretar también como la elección de estos bienes cuando el beneficio marginal se iguala con el costo marginal.

De la ecuación (1), despejando λ, tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_1} = \lambda p_1 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U/\partial q_1}{p_1}$$

De la ecuación (2), despejando λ, tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q_2} = \lambda p_2 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U/\partial q_2}{p_2}$$

Igualando λ de (1) y de (2), obtenemos:

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{p_1} \lambda = \frac{\partial U/\partial q_2}{p_2}$$

Esto significa que la utilidad marginal por peso gastado, en el óptimo, para el consumidor debe ser igual para todos los bienes.

También de las ecuaciones (1) y (2), si igualamos λs, llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{\partial U/\partial q_1}{p_1} = \frac{\partial U/\partial q_2}{p_2} \Rightarrow \frac{\partial U/\partial q_1}{\partial U/\partial q_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Que representa la condición de óptimo del consumidor, el lado izquierdo del último término representa la relación entre las utilidades marginales de los bienes 1 y 2 y esta debe ser igual a la relación de precios de los bienes[2]. Esto en el espacio de curvas de indiferencia de utilidad y restricción de ingreso correspondería a un punto, como el punto A de la figura 10, presentada anteriormente. Por último, si despejamos los precios a partir de (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \lambda p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\partial U/\partial q_1}{\lambda}$$

Esta es la disposición a pagar marginal por una unidad adicional del bien 1. Equivale a la relación entre la utilidad marginal del bien 1 y la utilidad marginal del ingreso.

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = \lambda p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\partial U/\partial q_2}{\lambda}$$

Esta es la disposición a pagar marginal por una unidad adicional del bien 2. Equivale a la relación entre la utilidad marginal del bien 2 y la utilidad marginal del ingreso.

Si asignamos una forma funcional para la función de utilidad con sus respectivos parámetros, la solución del problema primal reportaría las cantidades óptimas de los bienes 1 y 2 que maximizarían la utilidad del consumidor.

<u>Ejemplo: Maximización de una Función de Utilidad.</u>

Para ver como se obtienen las cantidades óptimas del proceso de maximización desarrollaremos el siguiente ejemplo: Suponga la siguiente función de utilidad y la restricción presupuestal.

$$u(q_1, q_2) = q_1 + 10\log q_2 \quad \text{y} \quad m = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

El problema primal se define como:

$$\underset{q_1, q_2}{Max}\ U(q_1, q_2)\ \ sujeto\ a\ \ m = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

La ecuación a maximizar es el Lagrangeano, éste es simplemente la suma de la función objetivo y la restricción:

$$L(q_1, q_2, \lambda) = q_1 + 10\log q_2 + \lambda\left[m - p_1 q_1 - p_2 q_2\right]$$

Note que el Lagrangeano es función de tres variables q_1, q_2 y λ. Luego, tendremos igual número de condiciones de primer. La condición de primer orden implica derivar

[2] Recuerde que la tasa marginal de sustitución representa la pendiente de la curva de indiferencia de utilidad y la relación entre los precios representa la pendiente de la restricción de presupuesto. Luego, son iguales en este punto y es por eso que representa el óptimo para el consumidor.

el lagrangeano con respecto a cada variable e igualar a cero, con esto garantizamos encontrar un valor óptimo para esa variable.

Las condiciones de primer orden de este problema de maximización estático son:

(1) $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda p_1 = 0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow \frac{10}{q_2} - \lambda p_2 = 0$

(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow m - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$

Dividiendo (1) entre (2), tenemos:

$$\frac{1}{10/q_2} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2} \Rightarrow \frac{q_2}{10} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow q_2 = \frac{10 p_1}{p_2} \quad (4)$$

Debido a que la función de utilidad con la que estamos trabajando es cuasi – homotética, tenemos que la curva de demanda Marshalliana por el bien 2 es directamente la ecuación (2). Luego, reemplazamos q_2 en (3):

$$m - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0$$
$$m - p_1 q_1 - p_2\left(\frac{10 p_1}{p_2}\right) = 0$$
$$m - p_1 q_1 - 10 p_1 = 0$$
$$p_1 q_1 = m - 10 p_1 \Rightarrow \tilde{q}_1 = \frac{m}{p_1} - 10$$

Luego: $$\tilde{q}_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10 \quad (5)$$

Es la demanda Marshalliana por el bien 1. Entonces, al final:

$$\tilde{q}_2(p_1, p_2) = \frac{10 p_1}{p_2} \text{ y } \tilde{q}_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10$$

Son las demandas Marshallianas, están son las cantidades óptimas de los bienes 1 y 2 que elige el individuo para maximizar su utilidad sujeto a la restricción de presupuesto. Note que sí tuviésemos los valores correspondientes a los precios de los bienes 1 y 2 y el ingreso encontraríamos las cantidades óptimas que maximizan la utilidad del consumidor. Por ejemplo, si el ingreso es \$ 100 y los precios del bien 1 y del bien 2 son $ 4 y $ 6, respectivamente tenemos que las cantidades óptima de ambos bienes son:

$$\tilde{q}_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10 = \frac{100}{4} - 10 = 15 \text{ unidades}$$
$$\tilde{q}_2(p_1, p_2) = \frac{10 p_1}{p_2} = \frac{10(4)}{6} = 6.66 \text{ unidades}$$

Luego, podemos dibujar el óptimo como se aprecia en la figura 12:

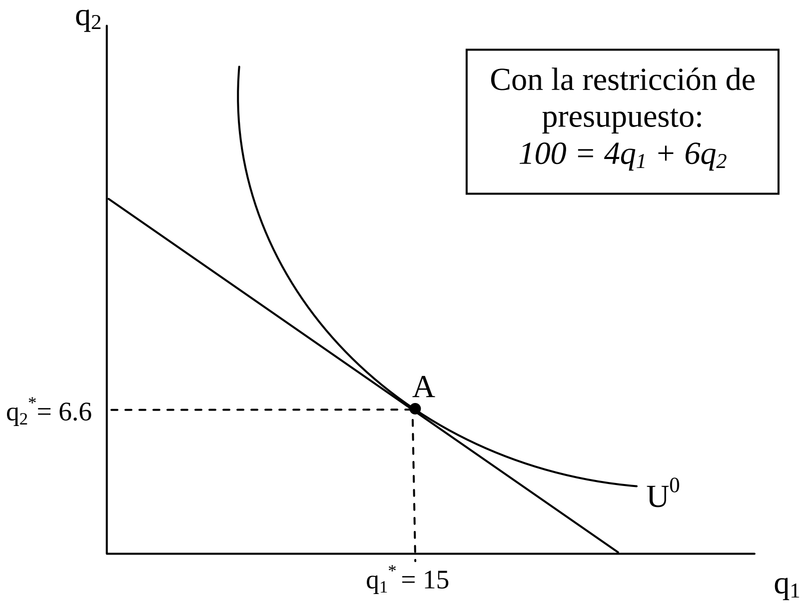


Figura 12: Optimo del Consumidor

Al final, 15 y 6.6 son las unidades de los bienes 1 y 2, respectivamente, que el individuo debe elegir para maximizar su utilidad sujeto a la restricción de presupuesto. Este resultado salió directamente de la derivación de las demandas Marshallianas.

Una vez que tenemos las demandas Marshallianas, podemos reemplazarlas en la función objetivo del problema primal (la función de utilidad y obtener la función de utilidad indirecta que depende ahora directamente de los precios y del ingreso, y no de las cantidades demandadas. Para el anterior ejemplo, tenemos:

$$u(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \tilde{q}_1 + 10 \log \tilde{q}_2$$
$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10 + 10 \log\left[\frac{10 p_1}{p_2}\right]$$

Note que al remplazar las demandas Marshallianas en la función de utilidad directa, la función de utilidad indirecta, ahora, pasa a depender de los precios de los bienes y del ingreso. Rearreglando términos, tenemos:

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10 + 10[\log 10 p_1 - \log p_2]$$

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10 + 10[\log 10 + \log p_1 - \log p_2]$$

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 10 + 10 + 10\log p_1 - 10\log p_2$$

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} + 10\log p_1 - 10\log p_2$$

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} + 10\log\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

La función de utilidad indirecta representa el máximo nivel de utilidad que puede alcanzar el consumidor dados unos precios y una restricción de presupuesto. Esta función es importante por que a partir de esta podemos representar los cambios en bienestar del consumidor. Según Varian (1996), las propiedades de la función de utilidad indirecta son:

- $V(p,m)$, es no creciente con respecto a p y es no decreciente con respecto a m. Es decir, si la utilidad indirecta es diferenciable, tenemos:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p} \leq 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V(p,m)}{\partial m} \geq 0$$

- $V(p,m)$, es homogénea de grado 0 en p y m.
- $V(p,m)$, es cuasi convexa con respecto a los precios.
- $V(p,m)$, es continua cualquiera que sean los precios y el ingreso.

Por último, si tenemos la función de utilidad indirecta, podemos derivar esta función y obtener las demandas Marshallianas utilizando la Identidad de de Roy.

$$-\frac{\partial V(p,m)/\partial p}{\partial V(p,m)/\partial m} = \tilde{q}(p,m)$$

Luego, para los dos bienes, tendríamos:

$$-\frac{\partial V(p_1, p_2, m)/\partial p_1}{\partial V(p_1, p_2, m)/\partial m} = \tilde{q}_1(p_1, p_2, m) \text{ y } -\frac{\partial V(p_1, p_2, m)/\partial p_2}{\partial V(p_1, p_2, m)/\partial m} = \tilde{q}_2(p_1, p_2, m)$$

Que serían las demandas Marshallianas de los bienes 1 y 2. El lector puede comprobar haciendo las respectivas derivadas que se llega a las formas funcionales de las demandas Marshallianas obtenidas anteriormente del problema primal. Veamos, esto. Tenemos:

$$V(p,m)=\frac{m}{p_1}+10\log p_1-10\log p_2$$

Las respectivas derivadas son:

$$\frac{\partial V}{\partial p_1}=-\frac{m}{p_1^2}+\frac{10}{p_1},\ \frac{\partial V}{\partial p_2}=-\frac{10}{p_2},\ \frac{\partial V}{\partial m}=\frac{1}{p_1}$$

Luego, las demandas Marshallianas por los bienes 1 y 2 son:

$$\tilde{q}_1(p_1,m)=\frac{-\frac{\partial V}{\partial p_1}}{\frac{\partial V}{\partial m}}=\frac{-\left(-\frac{m}{p_1^2}+\frac{10}{p_1}\right)}{\frac{1}{p_1}}=\frac{\frac{m}{p_1^2}-\frac{10}{p_1}}{\frac{1}{p_1}}=\frac{m}{p_1}-10$$

$$\tilde{q}_2(p_2,m)=\frac{-\frac{\partial V}{\partial p_2}}{\frac{\partial V}{\partial m}}=\frac{-\left(-\frac{10}{p_2}\right)}{\frac{1}{p_1}}=\frac{\frac{10}{p_2}}{\frac{1}{p_1}}=\frac{10p_1}{p_2}$$

Que son las demandas Marshallianas que encontramos al solucionar el problema primal. Ahora lo siguiente sería presentar y solucionar el problema dual para el caso de dos bienes:

$$\underset{q_1,q_2}{Min}\ p_1q_1+p_2q_2\ sujeto\ a\ \overline{U}=U(q_1,q_2)$$

Recuerde que este problema es otra forma de ver el comportamiento del consumidor en torno a la elección óptima de una canasta de bienes. Ahora, el consumidor busca elegir la cantidad óptima de q_1 y de q_2 que minimiza su gasto sujeto a que debe alcanzar un nivel de utilidad preestablecido que se supone es el máximo.
El Lagrangeano de este problema de minimización estático es:

$$L(q_1,q_2,\mu)=p_1q_1+p_2q_2+\mu\left[\overline{U}-U(q_1,q_2)\right]$$

Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial q_1}=0\Rightarrow\ p_1-\mu\frac{\partial U}{\partial q_1}=0\Rightarrow\mu\frac{\partial U}{\partial q_1}=p_1$$

La cantidad óptima del bien 1 que elige el consumidor, se obtiene cuando la utilidad marginal de consumir la última unidad de q_1 (término de la izquierda) se iguala con su costo marginal (termino de la derecha).

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial q_2}=0\Rightarrow\ p_2-\mu\frac{\partial U}{\partial q_2}=0\Rightarrow\mu\frac{\partial U}{\partial q_2}=p_2$$

La cantidad óptima del bien 2 que elige el consumidor, se obtiene cuando la utilidad marginal de consumir la última unidad de q_2 (término de la izquierda) se iguala con su costo marginal (termino de la derecha).

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \ \Rightarrow \overline{U} - U(q_1, q_2) = 0$$

De la tercera condición de primer orden se obtiene la restricción de presupuesto, que representa el nivel de utilidad de referencia que quiere alcanzar el consumidor, que se supone es el máximo.

Podemos despejar μ de (1) y de (2):

$$\mu = \frac{p_1}{\partial U / \partial q_1} \ \text{ y } \ \mu = \frac{p_2}{\partial U / \partial q_2}$$

Si igualamos μ de (1) y de (2), obtenemos:

$$\frac{p_1}{\partial U / \partial q_1} = \mu = \frac{p_2}{\partial U / \partial q_2}$$

Lo anterior significa que en el óptimo del problema dual el gasto para obtener una unidad adicional de utilidad debe ser igual para todos los bienes. También de las condiciones (1) y (2) podemos derivar la condición de óptimo del consumidor:

$$\frac{p_1}{\partial U / \partial q_1} = \frac{p_2}{\partial U / \partial q_2} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial U / \partial q_1}{\partial U / \partial q_2}$$

Note que esta es la misma condición obtenida también al solucionar el problema primal. Esta condición se apreciaría en términos gráficos en la parte (b), punto A, de la figura 10.

Adicionalmente, si asignamos una forma funcional a la función de utilidad, al resolver el problema dual podemos obtener las formas funcionales para las demandas Hicksianas. Esto lo podemos comprobar si seguimos trabajando con el ejemplo presentado anteriormente en donde se suponía la siguiente función de utilidad y la restricción presupuestal.

<u>Ejemplo de Minimización del Gasto sujeto a alcanzar un nivel de utilidad específico</u>.

$$u(q_1, q_2) = q_1 + 10 \log q_2 \ \text{ y } \ m = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

El desarrollo del problema dual genera:

$$\underset{q_1, q}{Min}\ p_1 q_1 + p_2 q_2 \ sujeto\ a\ \overline{u} = q_1 + 10 \log q_2$$

El Lagrangeano de este problema de minimización es:

$$L(q_1, q_2, \mu) = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \mu\left(\overline{u} - q_1 + 10 \log q_2\right)$$

Condiciones de Primer Orden:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p_1 - \mu = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; p_2 - \dfrac{10}{q_2}\mu = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \overline{u} - q_1 - 10 \log q_2 = 0$

Dividiendo (1) entre dos:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\mu}{\frac{10\mu}{q_2}} \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_2}{10} \rightarrow q_2 = \frac{10\,p_1}{p_2}$$

Luego, la demanda Hicksiana por el bien 2 es:

$$\overline{q}_2(p_1, p_2) = \frac{10\,p_1}{p_2}$$

Debido a la forma funcional de la función de utilidad, no queda en función de la utilidad. Ahora reemplazamos q_2 en (3) y despejamos q_1:

$$\overline{u} = q_1 + 10 \log q_2 \rightarrow \overline{u} = q_1 + 10 \log\left(\frac{10\,p_1}{p_2}\right) \rightarrow q_1 = \overline{u} - 10 \log\left(\frac{10\,p_1}{p_2}\right)$$
$$q_1 = \overline{u} - 10\left[\log 10\,p_1 - \log\, p_2\right] \rightarrow q_1 = \overline{u} - 10 \log 10 - 10 \log\, p_1 + 10 \log\, p_2$$

Luego, la demanda Hicksiana por el bien 1 resulta siendo igual a:

$$\overline{q}_1(p_1, p_2, \overline{u}) = \overline{u} - 10 - 10 \log\, p_1 + 10 \log\, p_2$$

Ahora si reemplazamos las demandas Hicksianas en la función objetivo (el presupuesto), obtenemos la función de mínimo gasto, es decir:

$$e(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1 \overline{q}_1(p_1, p_2, \overline{U}) + p_2 \overline{q}_2(p_1, p_2, \overline{U})$$

Esta función representa el mínimo gasto del consumidor dados unos precios para alcanzar un nivel de utilidad de referencia. Según Varian (1996), las propiedades de la función de mínimo gasto son:

- $e(p_1, p_2, U)$ es no decreciente con respecto a los precios.
- $e(p_1, p_2, U)$ es homogénea de grado 1 con respecto a los precios.
- $e(p_1, p_2, U)$ es cóncava con respecto a los precios.

- $e(p_1, p_2, U)$ es continua en los precios, cuando los precios sean suficientemente mayores a cero.

Siguiendo con el ejemplo, ahora podemos reemplazar las demandas Hicksianas en la función objetivo del problema dual y así obtenemos la función de mínimo gasto:

$$e(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1\overline{q}_1 + p_2\overline{q}_2$$
$$e(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1(\overline{U} - 10 - 10\log p_1 + 10\log p_2) + p_2\left(\frac{10p_1}{p_2}\right)$$
$$e(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1(\overline{U} - 10 - 10\log p_1 + 10\log p_2) + 10p_1$$
$$e(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1(\overline{U} - 10 - 10\log p_1 + 10\log p_2 + 10)$$
$$e(p_1, p_2, \overline{U}) = p_1(\overline{U} - 10\log p_1 + 10\log p_2)$$

Si ya tenemos la función de mínimo gasto, a través del lema de Sheppard podríamos regresarnos y obtener las demandas Hicksianas:

$$\frac{\partial e(p, \overline{U})}{\partial p} = \overline{q}(p, \overline{U})$$

Para el caso de los dos bienes que estamos estudiando, tendríamos:

$$\frac{\partial e(p_1, p_2, \overline{U})}{\partial p_1} = \overline{q}_1(p_1, p_2, \overline{U}) \text{ y } \frac{\partial e(p_1, p_2, \overline{U})}{\partial p_2} = \overline{q}_2(p_1, p_2, \overline{U})$$

Para el ejemplo que estamos trabajando, tendríamos:

$$e(p_1, p_2, \overline{u}) = p_1(\overline{u} - 10\log p_1 + 10\log p_2)$$

Luego, las demandas Hicksianas por los bienes 1 y 2 son:

$$\overline{q}_1(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = \overline{u} - 10\log p_1 - 10p_1\frac{1}{p_1} + 10\log p_2$$
$$\overline{q}_1(p_1, p_2, u) = \overline{u} - 10 - 10\log p_1 + 10\log p_2$$

$$\overline{q}_1(p_1, p_2, u) = \overline{u} - 10 - 10\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$
$$\overline{q}_2(p_1, p_2) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_2} = \frac{10p_1}{p_2}$$

¿Qué son las demandas Hicksianas que encontramos al solucionar el problema dual?.

Como conclusión podemos decir que el problema primal y el problema dual son dos formas diferentes de modelar el comportamiento del consumidor en torno a la elección de las cantidades óptimas de bienes de consumo. Que ambos problemas nos permiten encontrar la misma condición de óptimo “la relación de utilidades marginales entre los bienes es igual a la relación de precios”, para los bienes 1 y 2.

Que del problema primar se desprenden las demandas Marshallianas que están en función de los precios y del ingreso (demandas no compensadas) y del Problema Dual se desprenden las demandas Hicksianas que están en función de los precios y la utilidad (demandas compensadas). La figura 13 resume lo visto hasta el momento.

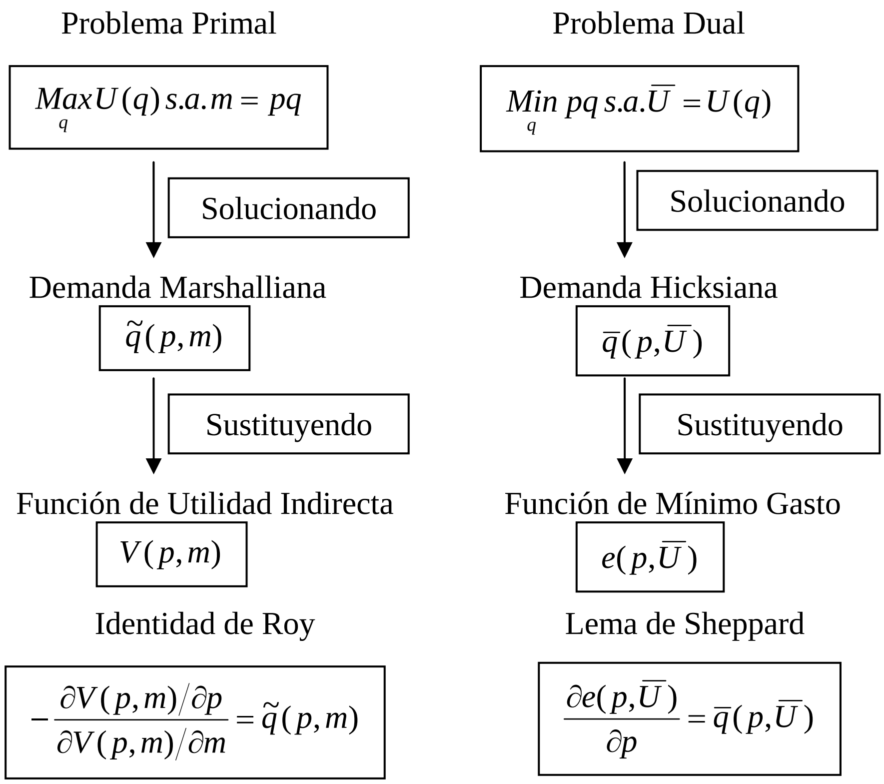


Figura 13: Dualidad en la Teoría del Consumidor

Adicionalmente, tenemos un conjunto de identidades que son de mucha utilidad en la teoría de la dualidad del consumidor. En el óptimo tenemos que V(p,m) = U y m = e(p, U), es decir:

$$V(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \overline{U})) \equiv \overline{U} \;\text{ y }\; e(p_1, p_2, V(p_1, p_2, m)) \equiv m$$

Luego:

$$\tilde{q}_i(p_1, p_2, e(p_1, p_2, \overline{U}) \equiv \bar{q}_i(p_1, p_2, \overline{U})$$
$$\bar{q}_i(p_1, p_2, V(p_1, p_2, m) \equiv \tilde{q}_i(p_1, p_2, m)$$

Entonces, si tenemos $V(p_1, p_2, m) = U$, la función de mínimo gasto se podría obtener a partir del inverso de la función de utilidad indirecta:

$$V^{-1}(p_1, p_2, U) = e(p_1, p_2, U),$$

Y, si tenemos $e(p_1, p_2, U) = m$,

$$e^{-1}(p_1, p_2, m) = V(p_1, p_2, m)$$

El inverso de la función de mínimo gasto resultaría en la función de utilidad indirecta.

Medición del Cambio en Utilidad a través del Método de Integral de Senda

El objetivo principal en esta sección es derivar una expresión que permita medir los cambios en el bienestar del consumidor derivados de cambios en precios e ingreso. Según Just, Hueth y Schmitz (2004), para derivar el cambio en utilidad primero supongamos que tenemos una política del gobierno que busca cambiar el precio de un bien y el ingreso de los hogares:

$$Política\ A: \left(p^0, m^0\right) \to \left(p^1, m^1\right)$$

La representación del cambio en bienestar, a partir de la función de utilidad indirecta, derivado de esta política que cambia el precio y el ingreso es:

$$\Delta V = V(p^0 m^0) - V(p^0 m^0)$$

En términos de una integral de senda esto se puede representar como:

$$\Delta U = \int_L dV(p, m)$$

Si derivamos totalmente la función de utilidad indirecta, obtenemos:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p} dp + \frac{\partial V(p,m)}{\partial m} dm = 0$$

Reemplazando el resultado de la derivada total en la expresión para medir el cambio en utilidad, tenemos:

$$\Delta U = \int_L \left(\frac{\partial V(p,m)}{\partial p} dp + \frac{\partial V(p,m)}{\partial m} dm \right)$$

La ecuación anterior hasta el momento define el cambio en utilidad derivado del cambio en el precio y el ingreso. Sin embargo, necesitamos una expresión más explícita, como por ejemplo una ecuación de demanda que se pueda estimar en términos empíricos, que permita hacer la medición y encontrar una cifra. Para alcanzar esto necesitamos seguir trabajando más con la anterior expresión.

Primero tengamos en cuenta que la derivada de la función de utilidad indirecta con respecto al ingreso es la utilidad marginal del ingreso que también y se puede representar como, λ. También, a través de la identidad de Roy podemos encontrar una expresión para la derivada de la función de utilidad indirecta con respecto al precio. Es decir:

$$-\frac{\partial V(p,m)/\partial p}{\partial V(p,m)/\partial m}=\tilde{q}(p,m)\Rightarrow \frac{\partial V(p,m)}{\partial p}=-\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}\tilde{q}(p,m)$$

Ahora, reemplazamos la expresión encontrada para la derivada de la función de utilidad indirecta con respecto al precio en la última expresión encontrada para el ΔU, de esto obtenemos:

$$\Delta U=\int_L\left(\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}-\tilde{q}(p,m)dp+\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}dm\right)$$

Observe ahora que la ecuación para medir el ΔU contiene explícitamente a la demanda Marshalliana. Si la derivada de la función de utilidad indirecta es λ, la anterior expresión se puede rescribir como:

$$\Delta U=\int_L\left(\lambda dm-\lambda\tilde{q}(p,m)dp\right)$$

Factorizando esta expresión tenemos que:

$$\Delta U=\int_L\lambda\left(dm-\tilde{q}(p,m)dp\right)$$

La ecuación anterior es una expresión que nos puede servir para medir el cambio en utilidad de un consumidor derivado de un cambio en precios en ingreso. Si bien la demanda Marshalliana se puede estimar en términos empíricos, la utilidad marginal del ingreso, λ, no permite una cuantificación empírica.

Por este motivo, la anterior expresión sí bien presenta una consistencia teórica por que es una herramienta para medir de manera exacta el cambio en utilidad del consumidor derivado del cambio en precios e ingreso, no presenta fortalezas en términos de su medición usando datos observables. Ante esto, en la siguiente sección propondremos el método de la integral de senda el cual a partir de suponer que la utilidad marginal del ingreso es constante, hace posible pasar de la expresión para el cambio en utilidad a una expresión para el cambio en el excedente del consumidor que si se puede estimar en términos empíricos.

Para poder hacer la medición tenemos que pasar de la expresión para el ΔU a una expresión que sea cuantificable a partir de datos. Entonces, partimos de nuevo de la expresión para el cambio en utilidad y notamos que si λ es constante la podemos sacar de la integral y luego podemos dividir por λ a ambos lados de la expresión, obteniendo el cambio en el excedente del consumidor:

$$\Delta S = \frac{\Delta U}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda}\int_{L}\left(dm - \tilde{q}(p,m)dp\right)$$

$$\Delta S = \frac{\Delta U}{\lambda} = \int_{L}\left(dm - \tilde{q}(p,m)dp\right)$$

Esto para un conjunto de "n" precios que cambian y el ingreso se representaría como:

$$\Delta S = \int_{m^0}^{m^1} dm - \sum_{i=1}^{n}\int_{p_i^0}^{p_i^1}\tilde{q}_i(p_i,m)dp_i$$

La anterior expresión es totalmente cuantificable ya que todos sus términos son observables, el único problema aquí es que el supuesto de que λ sea constante es bastante restrictivo. Esta expresión se obtiene siempre y cuando la utilidad marginal del ingreso, λ, sea constante. Se pueden tener infinitas sendas de integración, los cambios se expresan en términos de cambios en precios e ingreso.

Antes de seguir con el análisis recuerde que lo que buscamos es que esta expresión represente el cambio en utilidad o bienestar del consumidor derivado de la política que cambia los precios y el ingreso, y que además, para motivos de estimación, sin importar la senda de integración que obtengamos encontremos un valor único para el ΔS. Esto último, es de suma importancia para evitar tener que asumir juicios de valor en los procesos de evaluación de políticas que hagan que sobrestimemos o subestimemos beneficios con un impacto directo sobre los indicadores de la evaluación económica[3].

Hasta el momento algo muy importante a destacar es que el cambio en el excedente del consumidor es una medida exacta del cambio en el bienestar del consumidor sí la utilidad marginal del ingreso es constante. En este ejemplo ahora queremos averiguar cuando el ΔS es una medida única, sin importar la senda de integración de precios e ingreso. Para ver esto suponga un ejemplo sencillo de una política que ocasiona una disminución en los precios p_1 y p_2 de dos bienes q_1 y q_2 complementarios entre sí.

$$Política: \left(p_1^{\,0}, p_2^{\,0}\right) \rightarrow \left(p_1^{\,1}, p_2^{\,1}\right)$$

[3] Si sobrestimamos beneficios individuales el valor presente neto de los beneficios agregados y el indicador beneficio costo serán mayores que los reales. Si subestimamos ocurriría exactamente lo contrario.

La representación gráfica de este cambio en precios, para el caso de dos sendas de integración, se presenta en la figura 14.

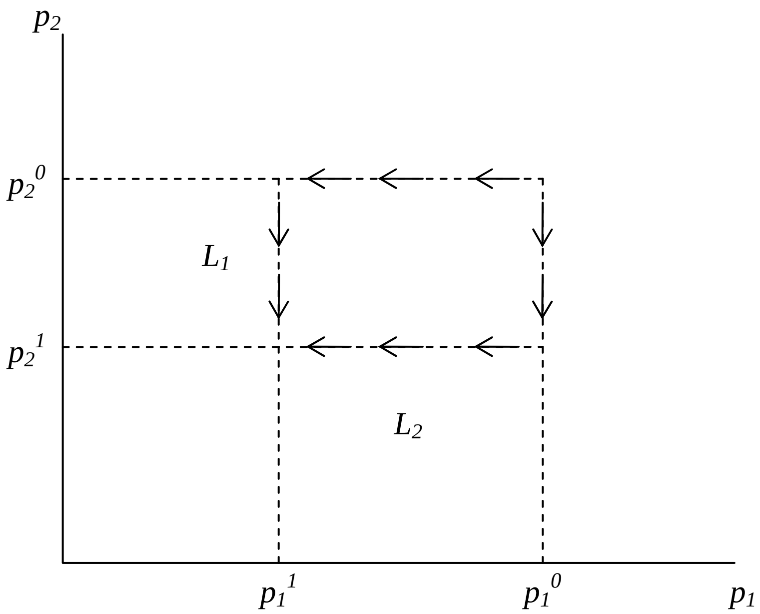


Figura 14: Senda de Integración de Precios

Bajo la primera senda, la senda L_1, primero cambia el precio del bien 1 y luego cambia el precio del bien 2. Para la senda 2, L_2, primero cambia el precio del bien 2, luego cambia el precio del bien 1. Es decir, en este caso, se puede hacer la medición del cambio en el excedente del consumidor a partir de dos sendas de integración.

Los cambios en el bienestar medidos a partir del área bajo las curvas de demanda para los bienes 1 y 2 se presentan en la figura 15 (en el espacio de precios y cantidades). Note que ante la baja en precios, las curvas de demandas se desplazan hacia la derecha, esto se debe a que se supone una relación de complementariedad entre ambos bienes. Es decir, si el precio de un bien baja su demanda se incrementa y la demanda del bien complementario también se incrementa. Este resultado sería diferente si el cambio en precios ocasionado por la política es para dos bienes sustitutos. El lector puede practicar este análisis gráfico desarrollando este mismo ejemplo pero en el caso en que los cambios de precios sean para dos bienes sustitutos.

En la parte (a) de la figura 15 se puede observar que ante el cambio en el precio del bien 1, manteniendo el precio del bien 2 en el nivel inicial (sin cambio), el ΔS se encuentra representado por el área m. Debido a que el bien 1 y el bien 2 son complementarios, en el mercado del bien 2 [parte (b) de la figura 15], la disminución en el precio del bien 1, provoca un desplazamiento de la demanda por el bien 2 hacia la derecha. Al final, en el mercado del bien 2, cuando el precio del bien 1 esta en el estado final, el ΔS es el área r + s.

Note también que cuando el precio del bien 2 es el final (con cambio), el ΔS en el mercado del bien 1 corresponde al área m + w. Al final, el ΔS total a partir de las dos sendas resulta en las siguientes áreas:

Tabla 2

Senda de Integración	Cambio en el Excedente del Consumidor
Senda 1: Primero cambia el precio del bien 1, luego cambia el precio del bien 2	m + r + s
Senda 2: Primero cambia el precio del bien 2, luego cambia el precio del bien 1	r + m + w

Del gráfico podemos intuir que para que el cambio en el excedente del consumidor derivado de un cambio en precios sea único, necesitaríamos que los efectos cruzados sean iguales, es decir:

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial p_2} = \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial p_1}$$

En términos generales:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} \quad \forall \text{ i, j = 1,...,n, con i} \neq \text{j}$$

Para todo i, j = 1, 2, …….., n con i ≠ j. Ahora, usando la ecuación encontrada para medir el cambio en el excedente del consumidor por las dos sendas resulta:

$$L_1 \Rightarrow \Delta S_1 = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_i(p_1, p_2^0, m)dp_1 - \int_{p_2^0}^{p_2^1} \tilde{q}_2(p_2, p_1^1, m)dp_2 = m + r + s$$

Por la senda 1 (primero cambia el precio del bien 1, luego cambia el precio del bien 2), la variable de integración en el primer término es p_1, mientras que en el segundo término es p_2 y el precio del bien 1 ahora se encuentra en el nivel final (con cambio).

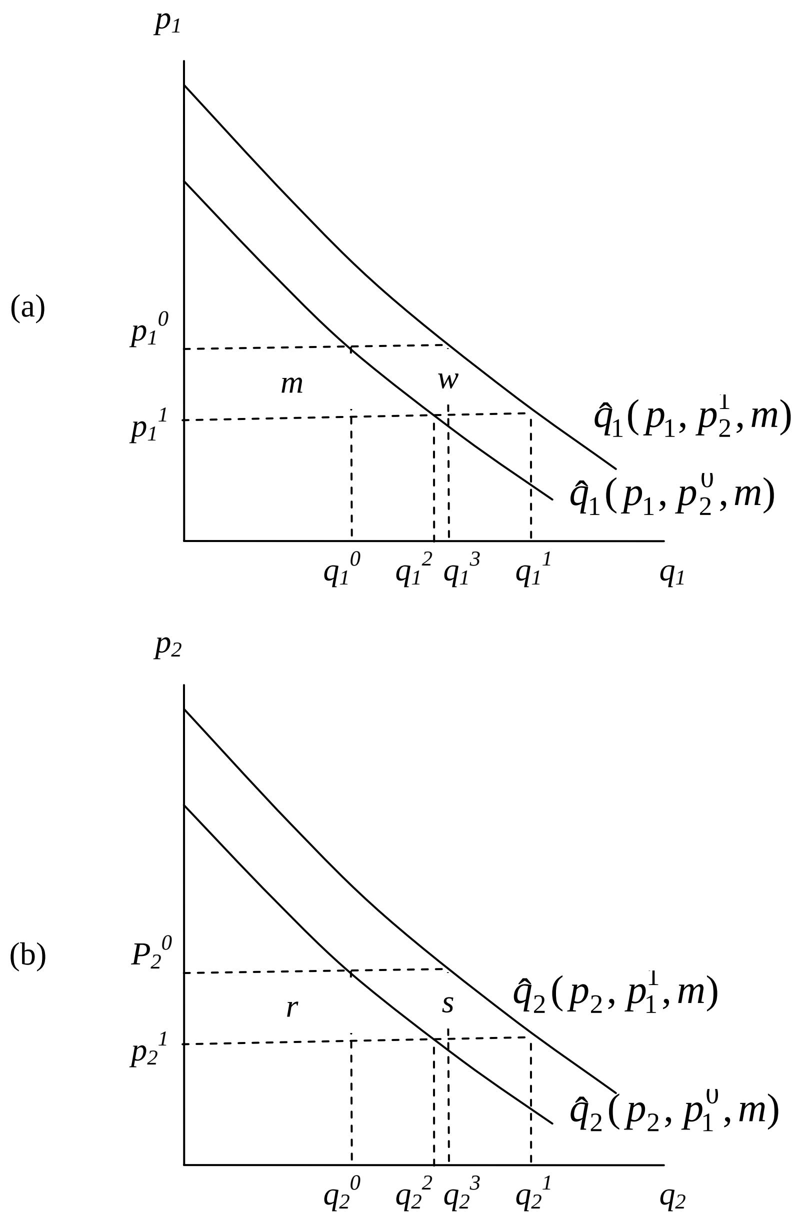


Figura 15: ΔS a través del Método de Integral de Senda.

En el caso de la senda 2 también podemos tener una expresión similar a la anterior.

$$L_2 \Rightarrow \Delta S_2 = -\int_{p_2^0}^{p_2^1} \tilde{q}_2(p_2, p_1^0, m)dp_2 - \int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_i(p_1, p_2^1, m)dp_1 = r + m + w$$

Por la senda 2 (primero cambia el precio del bien 2, luego cambia el precio del bien 1), la variable de integración en el primer término es p_2, mientras que en el segundo término es p_1 y el precio del bien 2 ahora se encuentra en el nivel final (con cambio). Note que el primer término de la ecuación para medir el cambio en el excedente del consumidor (Δm), no aparece en estas estimaciones debido a que el cambio en el bienestar del consumidor que estamos evaluando proviene de una política que solo cambia el precio de dos bienes y no cambia el ingreso. Es decir, para este caso el cambio en el ingreso es igual a cero, dm = 0.

Para obtener un cambio en el excedente del consumidor único, la estimación de ΔS no debería depender de la senda de integración (L_1 o L_2). Es decir, bajo la senda 1 o bajo la senda dos, el ΔS debería resultar en un valor único. Luego, la siguiente pregunta a responder es, ¿cómo podemos garantizar la obtención de un ΔS único?. Para dar respuesta a la anterior interrogante ahora estudiemos un ejemplo de estimación del ΔS con el Método de la Integral de Senda para cambios en el Precio de un Bien y un cambio en el Ingreso.

Para iniciar supongamos una política que provoca un cambio descendente en el precio de un bien y un cambio ascendente en el ingreso del consumidor. Con la baja en el precio del bien y el incremento en el ingreso el individuo debería experimentar una mejora en su nivel de bienestar. Para hacer la medición de este cambio en bienestar planteemos dos sendas al igual que en el anterior ejemplo.

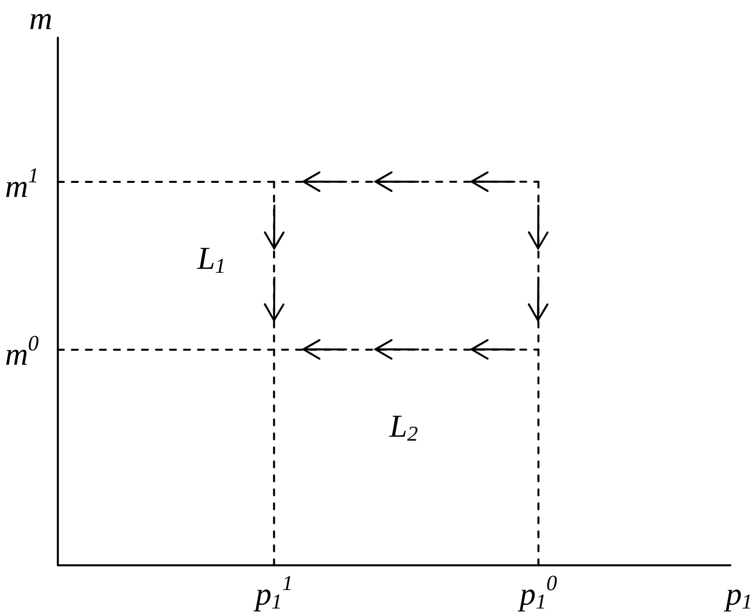


Figura 16: Senda de Cambio en Precio e Ingreso

Bajo la primera senda primero cambio el precio del bien 1, luego cambia el ingreso. Y bajo la senda 2, primero cambia el ingreso, luego el precio del bien 1. Es decir.

(a)

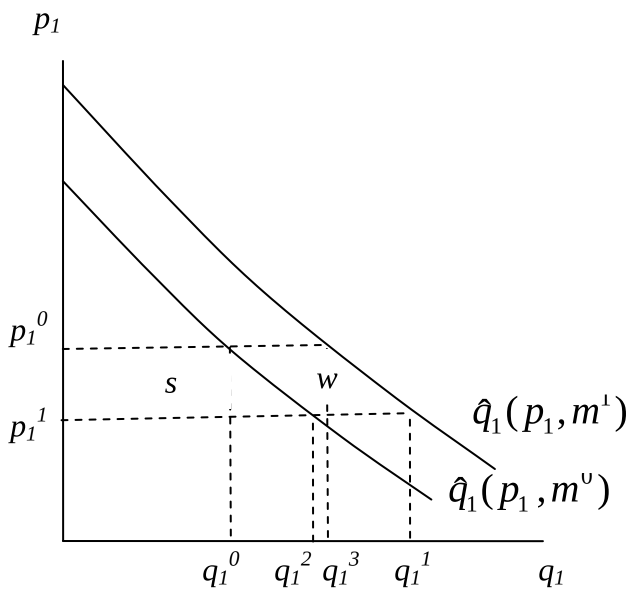


Figura 17: ΔS a través del Método de Integral de Senda.

Ahora, usando la ecuación encontrada para medir el cambio en el excedente del consumidor por las dos sendas resulta:

$$L_1 \Rightarrow \Delta S_1 = \Delta m - \int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_i(p_1, m^0)dp_1 = \Delta m + s$$

$$L_1 \Rightarrow \Delta S_1 = \int_{m^0}^{m^1} dm - \int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_i(p_1, m^0)dp_1 = \Delta m + s$$

Por la senda 1 (primero cambia el precio del bien 1, luego cambia el ingreso), la variable de integración en el segundo término es p_1, y el ingreso se encuentra en el estado inicial. En el caso de la senda 2 también podemos tener una expresión similar a la anterior.

$$L_2 \Rightarrow \Delta S_2 = \Delta m - \int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_i(p_1, m^1)dp_1 = \Delta m + s + w$$

$$L_2 \Rightarrow \Delta S_2 = \int_{m^0}^{m^1} dm - \int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_i(p_1, m^1)dp_1 = \Delta m + s + w$$

El ΔS total a partir de las dos sendas resulta en las siguientes áreas:

Tabla 3

Senda de Integración	Cambio en el Excedente del Consumidor
Senda 1: Primero cambia el precio del bien 1, luego cambia el ingreso	Δm + s
Senda 2: Primero cambia el ingreso, luego cambia el precio del bien 1	Δm + s + w

Luego, podemos concluir que el cambio en el excedente del consumidor por la senda 1 difiere del cambio en el excedente del consumidor estimado por la senda 2. En este Último caso el problema se esta generando por que el cambio en la cantidad demandada del bien 1 con respecto a un cambio en el ingreso es diferente de cero, $\partial q/\partial m \neq 0$. Este problema se denomina dependencia de senda. Es decir, el cambio en el excedente del consumidor depende de la senda (o camino de integración) que se tome. Esto representar un problema en términos de la evaluación como se mencionó anteriormente.

Para contrarrestar este problema se tiene que imponer restricciones adicionales sobre lo propuesto hasta el momento. Estas restricciones para lograr obtener un ΔS único son conocidas con el nombre de condiciones de independencia de senda, estas son dos:

a) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} = \frac{\partial (1)}{\partial m} = 0$, $\forall$ i = 1,…,n, esta condición implica que el efecto ingreso es igual a cero

b) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i}$, $\forall$ i, j = 1,…,n, con i ≠ j, esta es la condición de simetría de precios de Slutsky

Ambas condiciones deben cumplirse simultáneamente. El problema es que la condición 1 “efecto ingreso igual a cero es muy difícil de cumplir. Para conocer el efecto de un cambio en el ingreso sobre el cumplimiento simultaneo de las dos condiciones de independencia de senda, derivamos la restricción de presupuesto con respecto al ingreso.

$\frac{\partial m}{\partial m} = 1 = p\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} = 0$, $1 \neq 0$, esto debido a que el efecto ingreso es cero (condición 1).

Luego, concluimos que la condición 1 de independencia de senda viola la restricción de presupuesto, esto se demuestra al derivar la restricción de presupuesto como respecto al ingreso. Debido a esta situación se tiene que pensar en la posibilidad de tener tratamientos alternativos que permitan hacer factible el proceso de medición. Es términos teóricos esto equivale a adicionar más estructura a marco teórico presentado hasta el momento. Se tienen dos tratamientos alternos:

ii) *Utilidad Marginal del Ingreso Constante:* asumir que dm = 0, así el cambio en el excedente del consumidor solo se mediría sobre las curva de demandas de los bienes cuyos precios cambien, Silberberg (1972). Es decir:

$$\Delta S = -\sum_{i=1}^{n} \int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}_i(p_i, m) dp_i$$

Para todo i, j = 1, ……, n y todo i ≠ j. Bajo este enfoque solo necesitamos que se cumpla la segunda condición de independencia de senda. La condición de simetría de Slutsky.

ii) *Utilidad Marginal del Dinero Constante:* asumir que hay efecto ingreso, es decir, dm ≠ 0, y suponer que el n-ésimo bien es numerario, este enfoque es conocido con el nombre de constancia de la utilidad marginal del dinero.

Es decir.

$$\Delta S = \int_{m^0}^{m^1} dm - \sum_{i=1}^{n} \int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}_i(p_i, m)dp_i$$

Para todo i, j = 1,……, n-1 y todo i ≠ j. Bajo este tratamiento se debe probar que se cumplen ambas condiciones de independencia de senda, efecto ingreso igual a cero y simetría de Slutsky, esta última para todo i, j = 1,……, n-1 y todo i ≠ j.

Al final, en la siguiente tabla se resumen los anteriores resultados estudiados relacionados con la medición a través del método de la integral de senda:

Tabla 4

Medida de Bienestar (ΔS)	Condiciones de Independencia a Cumplir
$\Delta S = \int_{m^0}^{m^1} dm - \sum_{i=1}^{n} \int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}_i(p_i, m)dp_i$	(1) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} = \frac{\partial (1)}{\partial m} = 0$ ∀ i = 1,…,n (2) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i}$ ∀ i, j = 1,…,n, con i ≠ j
Constancia de la Utilidad Marginal del Ingreso	
$\Delta S = -\sum_{i=1}^{n} \int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}_i(p_i, m)dp_i$	(2) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i}$ ∀ i, j = 1,…,n, con i ≠ j
Constancia de la Utilidad Marginal del Dinero	
$\Delta S = \int_{m^0}^{m^1} dm - \sum_{i=1}^{n} \int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}_i(p_i, m)dp_i$	(1) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} = \frac{\partial (1)}{\partial m} = 0$ ∀ i = 1,…,n-1 (2) $\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i}$ ∀ i, j = 1,…,n-1, con i ≠ j

Con las condiciones de independencia de senda y sus diferentes tratamientos se garantiza encontrar unicidad en el cambio en el excedente del consumidor. Esto es importante en términos de la evaluación, ya que al tener un cambio en el excedente del consumidor único no se tendrán problemas de presencia de juicios de valor del evaluador de la política que culminen en la sobrestimación o subestimación de beneficios totales. No obstante, además de haber resuelto el problema de no unicidad del ΔS, existe otro problema si tratar. Este radica en la posibilidad de que el ΔS sea una medida ideal para representar el cambio en utilidad del consumidor derivado de una política pública que cambia los precios de los bienes. En la siguiente figura se aprecia el efecto producido sobre la medición de la utilidad a partir del ΔS cuando λ es y no es constante.

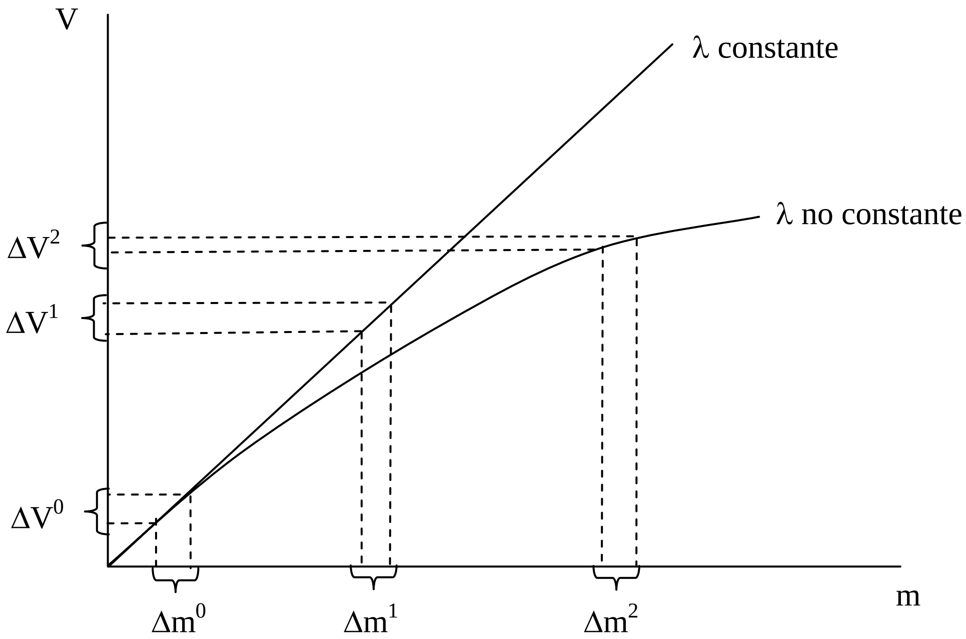


Figura 18: Cambio en el Excedente del Consumidor como una Medida del Cambio en Utilidad del Consumidor

En la figura 18 que para diferentes valores iniciales para el ingreso, el incremento en el gasto en una unidad monetaria genera el mismo cambio en utilidad, luego, podemos decir que cuando lambda sea constante se garantiza que el cambio en el excedente del consumidor es una medida apropiada para medir el cambio en utilidad del consumidor ante cambios en el ingreso. De otra manera, note que cuando lambda no es constante, un cambio en el ingreso Δm^0 genera un cambio en utilidad diferente al producido por Δm^1. Esto debido a que lambda no es constante, en este caso el ΔS solo mediría el cambio en utilidad relacionado con la última unidad monetaria de cambio en el ingreso.

En conclusión podemos decir que: (1) Si λ es constante, $\Delta S = \Delta U/\lambda$, el cambio en el Excedente del Consumidor mide exactamente el cambio en utilidad actual del consumidor. (2) Si λ no es constante, $\Delta S = \Delta U/\lambda$, el cambio en el Excedente del Consumidor solo mide el cambio en utilidad o la ganancia particular del consumidor por asignar $1 en el gasto actual.

Ante esto, lo que entendemos es que se debe mantener λ constante, para asegurar que el ΔS es una medida de bienestar del consumidor. Luego, la siguiente interrogante a responder es, ¿cuáles serían las condiciones que se deben cumplir para que λ sea constante?. Para responder esta pregunta partamos de la identidad de Roy:

$$-\frac{\partial V(p,m)/\partial p_j}{\partial V(p,m)/\partial m} = \tilde{q}_j(p,m) \rightarrow -\frac{\partial V(p,m)/\partial p_j}{\lambda} = \tilde{q}_j(p,m)$$

Despejando el cambio en utilidad derivado del cambio en p_j, tenemos:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_j} = -\lambda \tilde{q}_j(p,m)$$

La anterior expresión la derivamos con respecto al ingreso. Tenga en cuenta que λ es función de los precios y del ingreso, λ(p, m), al igual que la demanda no compensada:

$$\frac{\partial\left(\partial V(p,m)/\partial p_j\right)}{\partial m} = -\lambda \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} - \frac{\partial \lambda}{\partial m}\tilde{q}_j$$

Si tenemos en cuenta que por definición:

$$\frac{\partial\left(\partial V(p,m)/\partial p_j\right)}{\partial m} = \frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial m} = \frac{\partial\left(\partial V(p,m)/\partial m\right)}{\partial p_j} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_j}$$

Luego, la anterior expresión se puede escribir como:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = -\lambda \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} - \frac{\partial \lambda}{\partial m}\tilde{q}_j$$

Despejando, el efecto ingreso, tenemos:

$$\lambda \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} = -\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} - \frac{\partial \lambda}{\partial m}\tilde{q}_j$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} = -\frac{\partial \lambda / \partial p_j}{\lambda} - \frac{\partial \lambda / \partial m}{\lambda}$$

De la anterior expresión concluimos que para que el efecto ingreso sea igual a cero, se necesita que la utilidad marginal del ingreso, λ, sea constante con respecto a los precios y al ingreso. Este es el resultado encontrado por Samuelson (1942)[4].

Según Samuelson, λ, puede ser constante, al menos, con respecto a todos los precios pero no con respecto al ingreso. Es decir:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial \lambda}{\partial m} \neq 0$$

Esto es lo que este autor llama la definición de la constancia de la utilidad marginal del ingreso. Por otra parte, Samuelson también dice que λ puede ser constante con respecto al ingreso y con respecto a los n-1 precios.

---

[4] Samuelson, Paul. (1942). Constancy of the marginal utility of income. In Oscar Lange, Francis McIntyre and Theodore O. Yntema (eds), Studies in Mathematical Economics and Econometrics in Memory of Henry Schultz, Chicago: University of Chicago Press; reprinted in J. Stiglitz (ed.) (1996), Collected Scientific Paper of Paul A. Samuelson, vol. 1, Cambridge, MA: MIT Press, pp. 37-53.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m} = 0 \text{ y } \frac{\partial \lambda}{\partial p_{j-1}} = 0$$

Este se conoce con el nombre de la definición Marshalliana de la constancia de la utilidad marginal del dinero. Note, que esto se encuentra en correspondencia directa con los dos procedimientos alternativos ensayados cuando encontrábamos que las condiciones de independencia de senda no podían cumplirse simultáneamente.

Si aplicamos las condiciones de independencia de senda sobre:

$$\Delta U = \int_L \lambda \left(dm - \tilde{q}(p,m)dp \right)$$

Obtenemos:

$$\frac{\lambda \partial \tilde{q}_i}{\partial m} = \frac{\partial \lambda}{\partial m} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \lambda \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} \ \forall \text{ i, j} = 1,\ldots,\text{n, con i} \neq \text{j}$$

Si los n-1 precios ($\partial\lambda/\partial p_j = 0$)y el ingreso ($\partial\lambda/\partial m = 0$) son constantes, tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} = \frac{\partial (1)}{\partial m} = 0 \ \forall \text{ i} = 1,\ldots,\text{n-1}$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} \ \forall \text{ i, j} = 1,\ldots,\text{n-1, con i} \neq \text{j}$$

Al final, podemos obtener unas conclusiones relevantes sobre el cambio en el excedente del consumidor: (1) La constancia de la utilidad marginal del ingreso garantiza independencia de senda. Pero la independencia de senda no garantiza constancia de la utilidad marginal del ingreso. (2) Siempre que uno pueda obtener una medida única del ΔS, este excedente no necesariamente mide el ΔU. El cambio en el excedente del consumidor mide el cambio en utilidad solamente cuando la utilidad marginal del ingreso es constante.

Una última pregunta por responder es, ¿con qué frecuencia tendremos un cambio en el excedente del consumidor único a partir de las diferentes estimaciones factibles (a partir de las diferentes sendas de precio e ingreso) realizadas?. Debemos demostrar la unicidad del cambio en el Excedente del Consumidor a partir de la imposición de supuestos y juzgar el grado de restricción de los supuestos a la hora de realizar evaluaciones a nivel empírico. Despejemos V_j de la Identidad de Roy y derivemos esta expresión con respecto a p_i:

$$-\frac{\partial V(p,m)/\partial p_j}{\partial V(p,m)/\partial m}=\tilde{q}_j(p,m)\rightarrow-\frac{\partial V(p,m)/\partial p_j}{\lambda}=\tilde{q}_j(p,m)$$

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p_j}=-\lambda\tilde{q}_j(p,m)$$

Derivamos esta expresión con respecto a p_i:

$$\frac{\partial\left(\partial V(p,m)/\partial p_j\right)}{\partial p_i}=-\lambda\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\tilde{q}_j$$

Si tenemos en cuenta que por definición:

$$\frac{\partial\left(\partial V(p,m)/\partial p_j\right)}{\partial p_i}=\frac{\partial^2 V}{\partial p_j\partial p_i}=\frac{\partial\left(\partial V(p,m)/\partial m\right)}{\partial p_i}$$

Luego:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_j\partial p_i}=-\lambda\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\tilde{q}_j$$

Recuerde que si se cumplía la primera condición de independencia de senda "efecto ingreso igual a cero", teníamos que la siguiente expresión queda como:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j}=-\lambda\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial m}-\frac{\partial\lambda}{\partial m}\tilde{q}_j$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_j}=-\frac{\partial\lambda}{\partial m}\tilde{q}_j$$

Esto que se cumple para todo j, también debería cumplirse para todo i, es decir:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}=-\frac{\partial\lambda}{\partial m}\tilde{q}_i$$

Si reemplazamos esta expresión en la ecuación encontrada para p_i, tenemos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p_j\partial p_i}=-\lambda\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}-\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}\tilde{q}_j\rightarrow\frac{\partial^2 V}{\partial p_j\partial p_i}=-\lambda\frac{\partial\tilde{q}_j}{\partial p_i}+\frac{\partial\lambda}{\partial m}\tilde{q}_i\tilde{q}_j$$

Luego, de la anterior expresión despejamos la derivada de q_j con respecto a p_i:

$$\lambda \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_i} + \frac{\partial \lambda}{\partial m} \tilde{q}_i \tilde{q}_j \rightarrow \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = \frac{\left[\frac{\partial \lambda}{\partial m} \tilde{q}_i \tilde{q}_j - \frac{\partial^2 V}{\partial p_j \partial p_i} \right]}{\lambda} = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j}$$

El anterior resultado, por simetría de Slutsky. Luego, lo que hemos comprobado con esta demostración es que la condición de simetría de Slutsky implícitamente representa la primera condición "que el efecto ingreso sea igual a cero", ($\partial q_i/\partial m = 0$). Entonces, sin importar la senda de integración el ΔS sería único. Es decir, cuando:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} = 0 \rightarrow \eta = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} \frac{m}{\tilde{q}_i} = 0$$

Si el efecto ingreso es igual a cero, la elasticidad ingreso de la demanda también es igual a cero y el ΔS es único. Entonces, cuando se deja constante el precio del bien numerario, y el resto de precios y el ingreso cambian. El ΔS será una medida única, sí y solo sí, el efecto ingreso (elasticidad ingreso de la demanda) es cero para todos los bienes.

Teniendo en cuenta que todo esto se deriva de la condición de simetría, luego:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m} \frac{m}{\tilde{q}_i} = \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} \frac{m}{\tilde{q}_j}$$

Por consiguiente, para encontrar un ΔS único, las elasticidades ingreso de la demanda para todos los bienes deben ser iguales. Si despejamos para el bien j y reemplazamos en la restricción de presupuesto, obtenemos:

$$\tilde{q}_j = \frac{\partial \tilde{q}_j / \partial m}{\partial \tilde{q}_i / \partial m} \tilde{q}_i$$

$$m = p_j \tilde{q}_j (p_j, m) \rightarrow m = p_j \left(\frac{\partial \tilde{q}_j / \partial m}{\partial \tilde{q}_i / \partial m} \tilde{q}_i \right) \rightarrow m = \frac{\tilde{q}_i}{\partial \tilde{q}_i / \partial m} p_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m}$$

Cuando derivamos anteriormente la restricción de presupuesto con respecto al ingreso (sin aplicar todavía la primera condición de independencia de senda), teníamos:

$$m = p_j \tilde{q}_j (p_j, m) \rightarrow \frac{\partial m}{\partial m} = 1 = p_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_j}$$

Luego:

$$m = \frac{\tilde{q}_i}{\partial \tilde{q}_i / \partial m} p_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} \rightarrow m = \frac{\tilde{q}_i}{\partial \tilde{q}_i / \partial m} (1)$$

Reacomodando términos, tenemos:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}\frac{m}{\tilde{q}_i} = 1$$

Esto nos dice, que además de que las elasticidades ingreso de la demanda sean iguales para todos los bienes, estas también tienen que ser unitarias. Entonces, cuando todos los precios enfrentados por el consumidor cambian, pero el ingreso se mantiene constante, el cambio en el Excedente del Consumidor es únicamente definido, sí y solo sí, todas las elasticidades ingreso de la demanda son unitarias, lo cual ocurre, sí y solo sí, el mapa de indiferencia del consumidor es homotético.

El problema es que esta condición sigue siendo poco realista. Con excepción de bienes como la sal, incrementos en el ingreso no pueden generar cambios en el consumo de bienes.

Cambios en Subconjuntos de Precios

Ahora en esta sección vamos a generalizar los resultados obtenidos anteriormente para el caso en el que solo cambia un subconjunto de precios y el ingreso. Si solamente cambia un subconjunto de precios e ingreso, las restricciones sobre la superficie de utilidad y las funciones de demanda pueden ser reducidas?. Considere:

$$\hat{P}^j \equiv (p_1^1, \ldots, p_j^1, p_{j+1}^0, \ldots, p_n^0)$$

Donde, $\hat{P}^j$ representa los puntos a lo largo de una senda de integración. Y la siguiente es una senda de integración específica:

$$\hat{P}^j \equiv (p_1^1, \ldots, p_j^1, p_j, p_{j+1}^0, \ldots, p_n^0)$$

Supongamos que hay un cambio en precios e ingreso. El cambio en utilidad del consumidor derivado de este cambio en precios e ingreso se calcularía como:

$$\Delta U = \int_{m^0}^{m^1} \lambda(p^0, m)dm - \sum_{j=1}^{n} \int_{\hat{p}^{j-1}}^{\hat{p}^j} \lambda(p^j, m^1)\tilde{q}_j(p^j, m^1)dp_j$$

Donde, λ es función de los precios y del ingreso. Si λ es constante con respecto a n precios que cambian y el ingreso, obtenemos:

$$\Delta S = \int_{m^0}^{m^1} dm - \sum_{j=1}^{n} \int_{\hat{p}^{j-1}}^{\hat{p}^j} \tilde{q}_j(p^j, m^1)dp_j = \Delta m + \sum_{j=1}^{n} \Delta S_j$$

Donde, ΔS_j representa el cambio en el excedente del consumidor en el mercado j. Es decir:

$$\Delta S_j = \int_{\hat{p}^{j-1}}^{\hat{p}^j} \tilde{q}_j(\hat{p}^j, m^1)dp_j$$

Si el ingreso no cambia de la posición inicial a la final del cambio precio – ingreso, entonces, el primer término del lado derecho de la expresión encontrada para medir el cambio en utilidad y para medir el cambio en el excedente del consumidor pueden eliminarse así que la constancia de λ con respecto al ingreso no sería necesaria.

En la expresión para medir el cambio en utilidad, solo la constancia de λ con respecto a los precios es requerida, puesto que el ingreso no cambia. Si λ es constante con respecto a todos los precios (ingreso) que cambian, la sumatoria de los cambios en el excedente del Consumidor en los mercados para los cuales cambia el precio dará una medida monetaria del cambio en utilidad. Estas condiciones parecen ser menos restrictivas que las planteadas por Samuelson. Sin embargo, impone restricciones fuertes a la función de utilidad.

Por ejemplo, si cambia cualquier p_j y el ingreso, entonces, los resultados asumen que:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}\frac{m}{\tilde{q}_i} = -\frac{\partial \lambda}{\partial m}\frac{m}{\lambda_i}$$

Es decir, se necesita que el efecto ingreso sea igual a cero:

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}\frac{m}{\tilde{q}_i} = 0$$

El problema es que si el ingreso cambia, los anteriores resultados solo necesitan que:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = 0$$

Para todos los precios j que están cambiando. Entonces, si lambda es constante con respecto a los precios j que están cambiando y al ingreso, luego, el efecto ingreso es igual a cero, también para un subconjunto de precios que cambian:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m} = \frac{\partial \lambda}{\partial p_j} \rightarrow \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial m} = 0$$

Note que el lado derecho de la anterior ecuación no depende de p_j. Es decir, la elasticidad ingreso para todos los bienes cuyo precio cambia es la misma. Por consiguiente, el cambio en el excedente del Consumidor es único, sí y solo sí, las elasticidades ingreso son idénticas para todos los bienes cuyo precio cambia, lo cual implica homoteticidad solamente con respecto al conjunto de bienes para los cuales cambia el precio, y la elasticidad ingreso debe ser cero si cambia el ingreso.

El inconveniente de esto es que resulta poco probable que la elasticidad ingreso sea igual a cero y también poco probable que la elasticidad ingreso sea igual entre los bienes. Otro problema de tener una medida única del cambio en utilidad, es que si a la hora de hacer la agregación, las utilidades marginales de los individuos no son idénticas. Entonces, no se podrá encontrar un método de agregación de utilidades de los consumidores, lo cual afecta mucho a las personas que hacen políticas y que tiene como objetivo la maximización del bienestar de la sociedad. También, en la práctica, las utilidades marginales no pueden ser del todo medibles. Por ejemplo:

$$\textit{Consumidor 1: } U$$
$$\textit{Consumidor 2: } U \equiv 2U$$

Note en este caso que la utilidad del consumidor 1 y la utilidad del consumidor 2 tienen el mismo significado ordinal. Pero la utilidad marginal de ingreso para el consumidor 2 siempre será el doble de la utilidad marginal del consumidor 1.

Después de haber estudiado rigurosamente la medición del bienestar del consumidor ante cambios en precios e ingreso a través del enfoque de integral de senda, entraremos a estudiar las medidas de disposición a pagar Hicksianas que son una alternativa teórica para la medición del bienestar del consumidor que supera en varios aspectos a la metodología anteriormente estudiada.

Nociones Básicas sobre el Excedente del Consumidor

Dado que en la siguiente sección estudiaremos las medidas de disposición a pagar Hicksianas, primero recordaremos algunos conceptos relacionados con el excedente del consumidor, la disposición a pagar total y marginal, precio de reserva, efecto sustitución y efecto ingreso por los enfoques de Slutsky y Hicks, todos estos de gran importancia para el entendimiento de las medidas de disposición a pagar Hicksianas.

Por definición el excedente del consumidor que denotaremos con las letras, Excedente del Consumidor, representa la ganancia neta del consumidor por participar en calidad de comprador de bienes en el mercado. El Excedente del Consumidor propuesto inicialmente por Dupuit y refinado por Marshall es un área, con una interpretación económica. El Excedente del Consumidor es el área por debajo de la demanda y por encima del precio y surge de la diferencia entre lo que esta dispuesto a pagar el consumidor y lo que realmente paga en el mercado por éste.

Para entender este concepto es muy importante tener en cuenta otros como el precio de reserva, la disposición a pagar marginal (DAPMg) y la disposición a pagar total (DAPT).

Como se ha dicho en capítulos anteriores, las preferencias del consumidor se manifiestan a través de las elecciones de canastas de bienes de consumo. Teniendo en cuenta que hay una infinidad de bienes y servicios en la economía para elegir por parte del consumidor necesitamos una definición que nos ayude a simplificar el proceso de medición del bienestar de este agente, esa definición es el concepto de valor.

Un bien tiene un valor cuando existe una persona que esta dispuesta a pagar por el. Luego, la disposición a pagar se puede interpretar como el nivel de sacrificio que una persona hace por tener acceso al uso de un bien y/o servicio. Este sacrificio del consumidor se manifiesta al momento de la compra, y generalmente, lo que vemos en los mercados es que al pagar un determinado precio por una unidad de un bien y/o servicio estamos haciendo un sacrificio expresado en términos de la máxima cantidad de dinero que estamos dispuestos a pagar por ese bien.

En el mundo real lo que observamos es que la disposición a pagar entendida como la capacidad de pago de un consumidor por cantidades específicas de bienes y servicios depende directamente de la cantidad de ingreso disponible que tenga el individuo para gastar.

Como se dijo antes la disposición a pagar puede ser marginal y total. La disposición a pagar marginal (DAPMg) es la cantidad de dinero adicional que el individuo esta dispuesto a pagar por conseguir una unidad adicional del bien. Mientras que la disposición a pagar total (DAPT), como su nombre lo indica, es la cantidad total de dinero que el individuo esta dispuesto a sacrificar por conseguir una cantidad específica del bien. Luego, como estas medidas representan el nivel de sacrificio del consumidor por obtener bienes y servicios podemos decir que estas también se podrían interpretar en términos del beneficio derivado de obtener dichos bienes y servicios. Entonces, la DAPMg sería el beneficio marginal del consumidor por acceder a una unidad adicional del bien y la DAPT el beneficio total (ganancia total) por acceder a una cantidad específica del bien. La disposición a pagar marginal y total se presenta en las siguientes figuras:

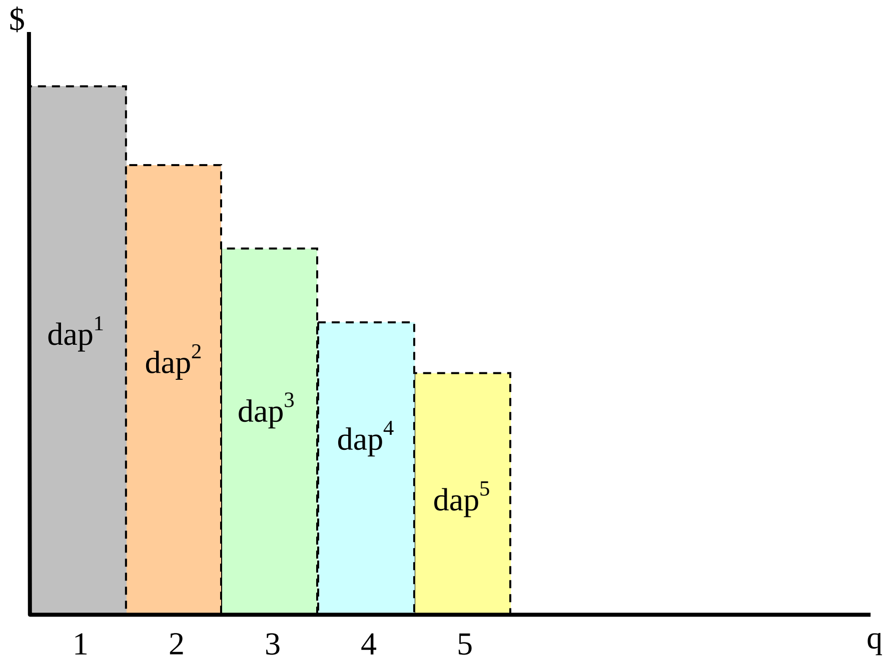


Figura 19: El Concepto de Disposición a Pagar Marginal

En la anterior figura se presenta la máxima cantidad de dinero que el consumidor esta dispuesto a pagar por una unidad adicional de q_1, DAPMg. Note que la DAPMg va decreciendo a medida que el consumidor va saciando su necesidad del bien 1. Esto esta en directa correspondencia con la tasa marginal de sustitución decreciente, que era el primer concepto que nos permitía estudiar el comportamiento del consumidor en términos del costo de oportunidad originado al querer obtener más de un bien en particular. En la siguiente figura, para el caso de un consumo de 5 unidades de q1, se presenta la DAPT o beneficio total.

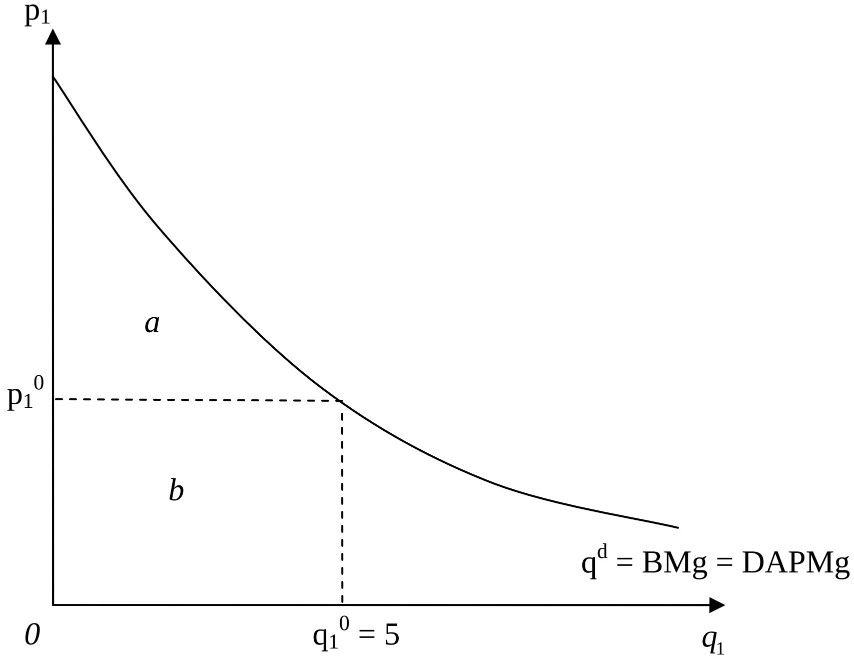


Figura 20: El Concepto de Disposición a Pagar Total

Suponiendo que el precio de mercado es p_1^0, los beneficios totales de comprar cinco unidades del bien 1 en el mercado corresponden al área a + b, es decir, es la suma de las DAPMg hasta $q_1 = 5$ unidades. Esta sería la disposición a pagar total del consumidor por esa cantidad del bien 1.

Para entender estos conceptos, la definición de precio de reserva también resulta útil debido a que para el caso de bienes mercadeables el consumidor para realizar su compra tiene en cuenta los precios de mercado. El precio de reserva es el máximo precio o la máxima disponibilidad a pagar del cliente por acceder al consumo de una unidad del bien. Veamos esto en la siguiente figura.

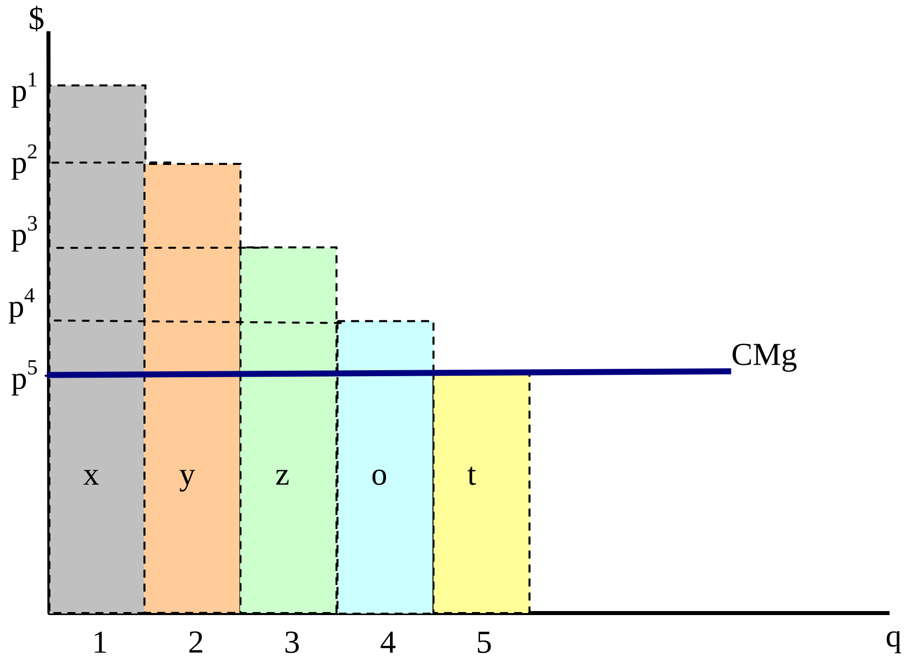


Figura 21: El Concepto de Precio de Reserva.

Como se aprecia en la anterior figura tenemos diferentes disposiciones marginales a pagar y un costo marginal de producir el bien (bajo competencia perfecta) que indica que el precio de mercado es p^5. Por la primera unidad de "q", el consumidor tiene que pagar "p^1", por la segunda unidad paga "p^2", y así sucesivamente. El área "x" es el ingreso que recibe la firma por vender la primera unidad, el área "y" por vender la segunda unidad, y así sucesivamente. Note también que ninguno de los precios cobrados es igual al costo marginal (CMg), esto claramente refleja la discriminación de precios nombrada al inicio.

Al final si tenemos en cuenta que el área b de la figura 33 es la cantidad que efectivamente paga el consumidor en el mercado por acceder a cinco unidades del bien uno, la ganancia neta del consumidor por comprar esas unidades de q_1 en el mercado sería equivalente al área a. Esta ganancia neta del consumidor, definida por el área bajo la curva de demanda y por encima del precio de mercado es lo que se define con el nombre de excedente del consumidor, S. Ahora lo que sigue es entender como el excedente del consumidor se deriva de los cambios en utilidad del consumidor. Eso lo vemos a través de la siguiente figura.

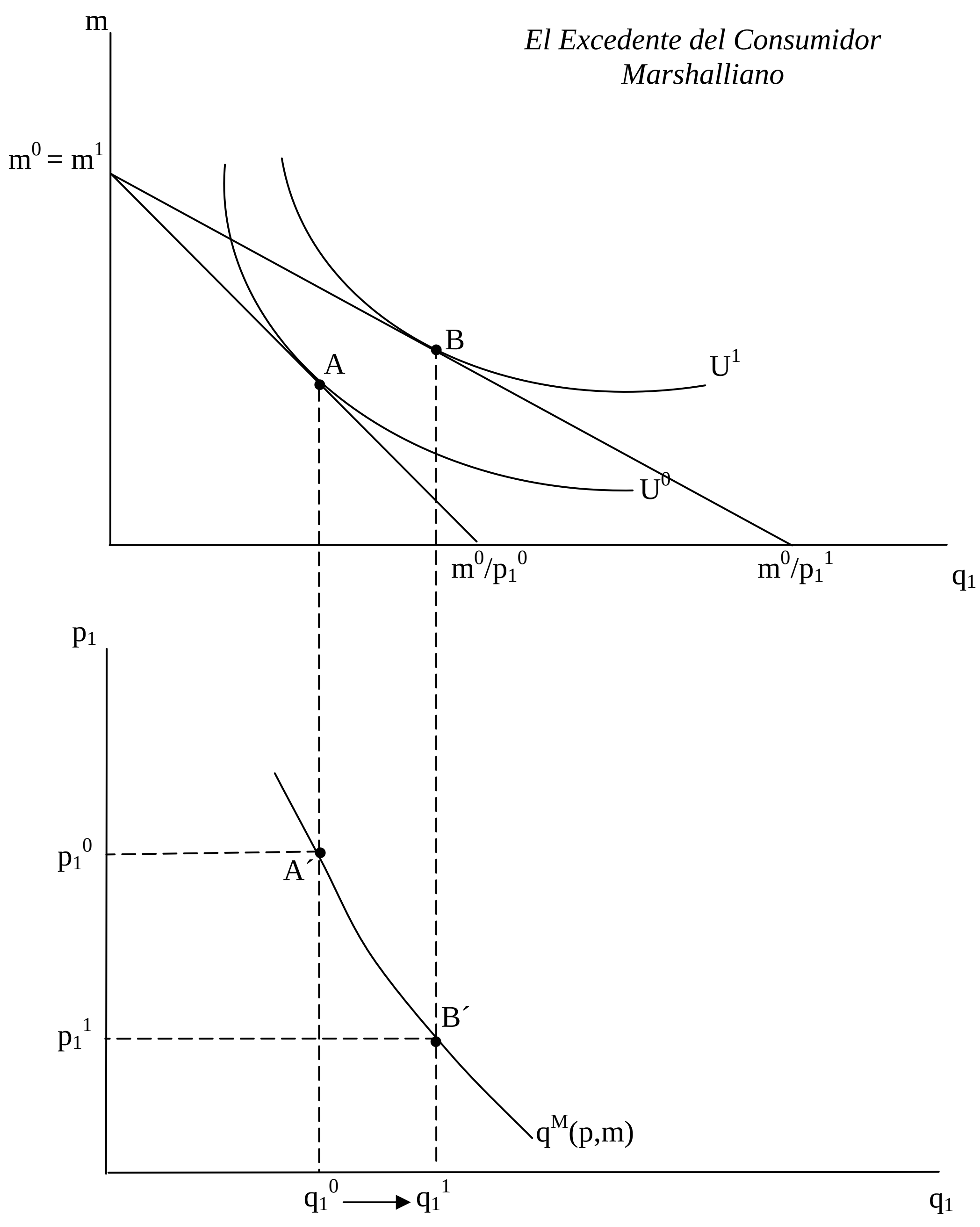


Figura 22: Excedente del Consumidor Marshalliano.

Ante la baja en el precio de q_1, el consumidor pasa de una curva de indiferencia inicial U^0 a una final U^1. Esto en el espacio de precios y cantidades del bien 1, equivale a pasar del punto A´ hasta el punto B´. Note que en el punto A´ el precio del bien 1 de referencia es el inicial con una cantidad inicial de q_1^0 y en el punto B´ el precio de referencia es el final con una cantidad final de q_1^1. El área entre el precio inicial y final, por debajo de la curva de demanda sería el cambio en el excedente del consumidor, ΔS, este representaría la ganancia en bienestar del consumidor atribuida a la baja en el precio del bien 1 desde q_1^0 hasta q_1^1. El ΔS equivale al área (p_1^1 p_1^0AB).

Volviendo a la discusión sobre los tipos de funciones de demanda, debemos tener en cuenta que la demanda Marshalliana es observable y por consiguiente la podemos estimar a partir de datos sobre precios y cantidades. La medida de beneficios del consumidor obtenida a partir de esta función es el excedente del consumidor que, como se dijo antes, se define como el área bajo la curva de demanda y por encima del precio.

En términos económicos también dijimos que el excedente del consumidor mide la diferencia entre la disponibilidad a pagar total (beneficios totales del consumidor) y lo que realmente paga por adquirir cierta cantidad de un bien por consiguiente el esta medida reporta el beneficio neto del consumidor por comprar bienes en el mercado.

Ante un cambio de precio estamos interesados en el cambio en el excedente del consumidor como una medida de cambio en los beneficios del consumidor ante el cambio en precios. Si el cambio en precios es una disminución, el cambio en el excedente del consumidor es positivo, es decir, es una mejora en el bienestar del consumidor. En cambio, si el cambio en precios es un alza, el cambio en el excedente del consumidor es negativo, es decir, es un empeoramiento en el bienestar del consumidor. El cálculo de esta área a través de una integral sería:

$$\Delta S = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}(p_i, m)\,dp_i$$

Adicionalmente al excedente del consumidor Marshalliano existen otras medidas de bienestar del consumidor. Estas medidas de bienestar propuestas por Hicks se diferencian del EC debido a que la medición se hace sobre las demandas Hicksianas y no sobre la demanda Marshalliana. La medición de los beneficios del consumidor al tomar como referencia las demandas Hicksianas implica que son mediciones exactas del cambio en el bienestar del consumidor. Estas medidas se estudiaran posteriormente en la sección correspondiente a las medidas de disposición a pagar Hicksianas, pero antes estudiaremos los efectos provocados por un cambio en el precio de un bien.

Efecto Sustitución y Efecto Ingreso.

Ante un cambio en el precio de un bien (una disminución) se producen dos efectos: (1) El consumidor tiende a comprar una cantidad mayor del bien que se ha abaratado y una menor cantidad de los bienes que son relativamente más caros. Esta respuesta a la variación de los precios relativos de los bienes se denomina efecto sustitución. El efecto sustitución (ES), es entonces, la variación que experimenta el consumo de un bien cuando varía su precio y se mantiene constante el nivel de utilidad. (2) Dado que uno de los bienes ahora es más barato, los consumidores disfrutan de un aumento de su poder adquisitivo real. Esto implica que mejora el bienestar del consumidor ya que puede comprar la misma cantidad del bien con menos dinero y, por lo tanto, le queda más para realizar otras compras. La variación de la demanda provocada por esta variación del poder adquisitivo real se denomina efecto ingreso. Luego, el efecto ingreso (EI), es entonces, la variación del consumo de un bien provocada por un aumento en el poder adquisitivo, manteniéndose constante el precio relativo. La suma del efecto sustitución y el efecto ingreso es el efecto total (ET) derivado del cambio en el precio. Esto se aprecia en la siguiente figura:

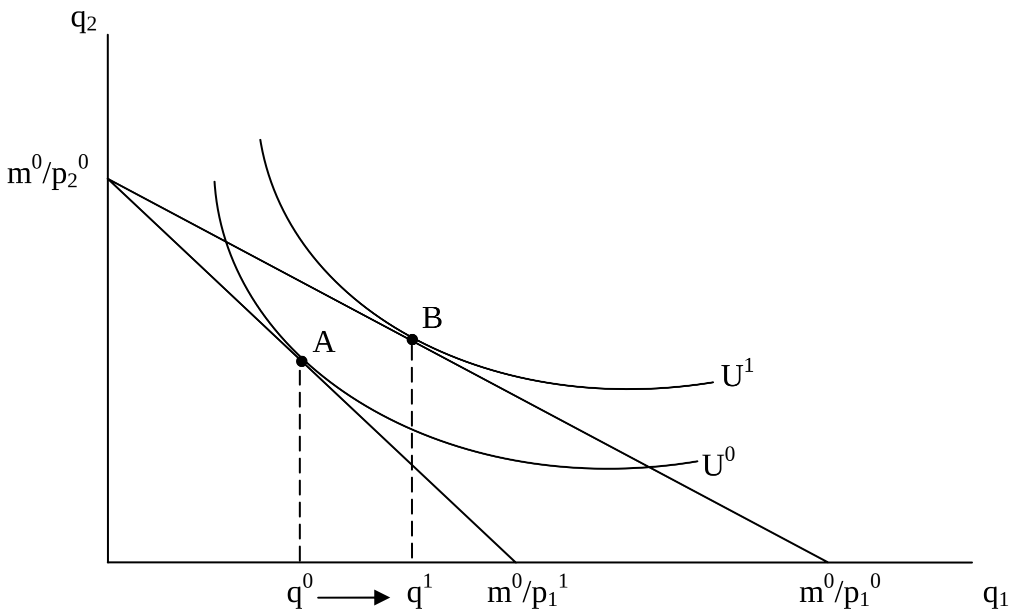


Figura 23: Efecto Total de un Cambio (una disminución) en el Precio del Bien 1

Para el caso de una subida en precio del bien 1, el consumidor experimentaría una caída en el consumo de ese bien debido a que ahora el bien 1 es más costoso. Esto se aprecia en la siguiente figura:

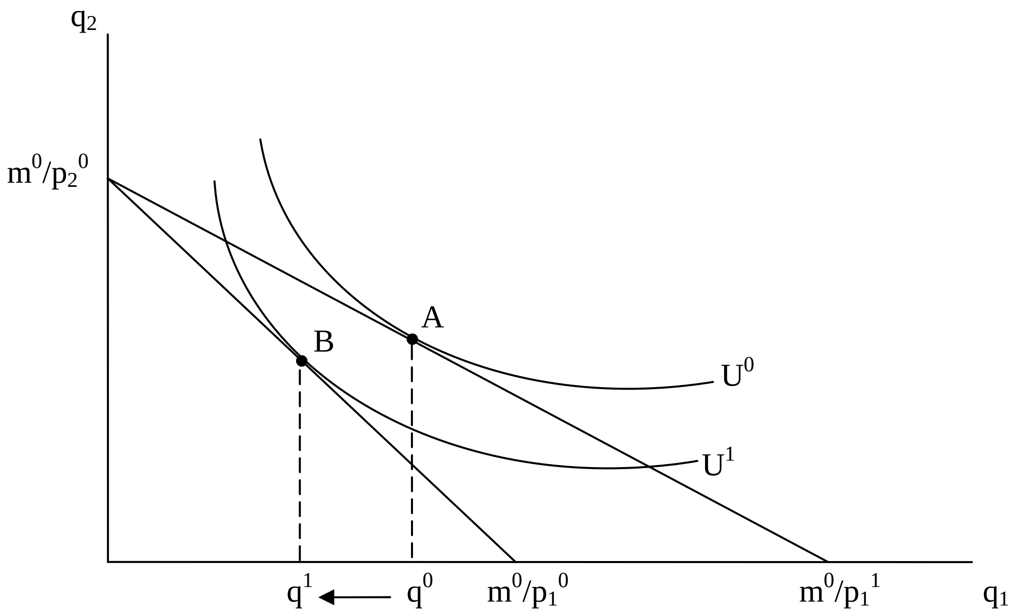


Figura 24: Efecto Total de un Cambio (disminución) en el Precio del Bien 1

Existen dos enfoques para estudiar estos efectos: (1) El enfoque de Slutsky, (2) El enfoque de Compensación de Hicks. Estos los estudiamos a continuación:

Enfoque de Slutsky "Ecuación de Slutsky"

El enfoque de Slutsky conocido con el nombre de "ecuación de Slutsky" nos dice que aunque la función de demanda Hicksiana no es directamente observable, sí la podemos derivar con respecto al precio, si la relacionamos con la demanda Marshalliana. La demanda Marshalliana al contar con el precio y el ingreso como variables explicativas, permite derivar el efecto ingreso y el efecto sustitución. Esta relación se conoce con el nombre de ecuación de Slutsky. Para ver de donde salen los dos efectos, iniciamos el análisis suponiendo que q* es la cantidad de bienes que maximiza la utilidad del individuo dados unos precios y un ingreso (p*, m*). Luego, en el óptimo la demanda Hicksiana es igual a la demanda Marshalliana:

$$\bar{q}_j(\mathbf{p},U^*)=\tilde{q}_j(\mathbf{p},m^*)$$
$$\bar{q}_j(\mathbf{p},U^*)=\tilde{q}_j(\mathbf{p},e(p,U^*))$$

Luego, según Varian (1992), derivamos la demanda Hicksiana para el bien j con respecto a uno de los precios p_j, digamos p_i, en el óptimo. Esto genera la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \bar{q}_j(\mathbf{p^*},U^*)}{\partial p_i}=\frac{\partial \tilde{q}_j(\mathbf{p^*},m^*)}{\partial p_i}+\frac{\partial \tilde{q}_j(\mathbf{p^*},m^*)}{\partial m}\frac{\partial e_j(\mathbf{p^*},U^*)}{\partial p_i}$$

Por el lema de Sheppard sabemos que la derivada de la función de mínimo gasto con respecto al precio es la demanda Hicksiana y en el óptimo la demanda Hicksiana es igual a la demanda Marshalliana, luego:

$$\frac{\partial \bar{q}_j(\mathbf{p^*},U^*)}{\partial p_i}=\frac{\partial \tilde{q}_j(\mathbf{p^*},m^*)}{\partial p_i}+\frac{\partial \tilde{q}_j(\mathbf{p^*},m^*)}{\partial m}\tilde{q}_i^*$$

Entonces:

$$\frac{\partial \tilde{q}_j(\mathbf{p^*},m^*)}{\partial p_i}=\underbrace{\frac{\partial \bar{q}_j(\mathbf{p^*},U^*)}{\partial p_i}}_{\boxed{\text{Efecto Sustitución}}}+\underbrace{\frac{\partial \tilde{q}_j(\mathbf{p^*},m^*)}{\partial m}\tilde{q}_i^*}_{\boxed{\text{Efecto Ingreso}}}$$

Note que el primer término del lado derecho es la variación en el consumo del bien q_i ante un cambio en su precio (efecto sustitución) y el otro término es la variación en el consumo derivada de una variación en el poder adquisitivo (efecto ingreso). Luego veremos esto en términos gráficos. De lo anterior podemos decir que el pensamiento de Slutsky va en el sentido que: (1) En la vida real no contamos con información para estimar directamente las curvas de indiferencia de utilidad empíricamente. (2) En cambio, sí contamos con información sobre precios y cantidades consumidas. Entonces, pensemos en una compensación ante el cambio de precio basada en esta información sobre cantidades consumidas y precio en un momento determinado.

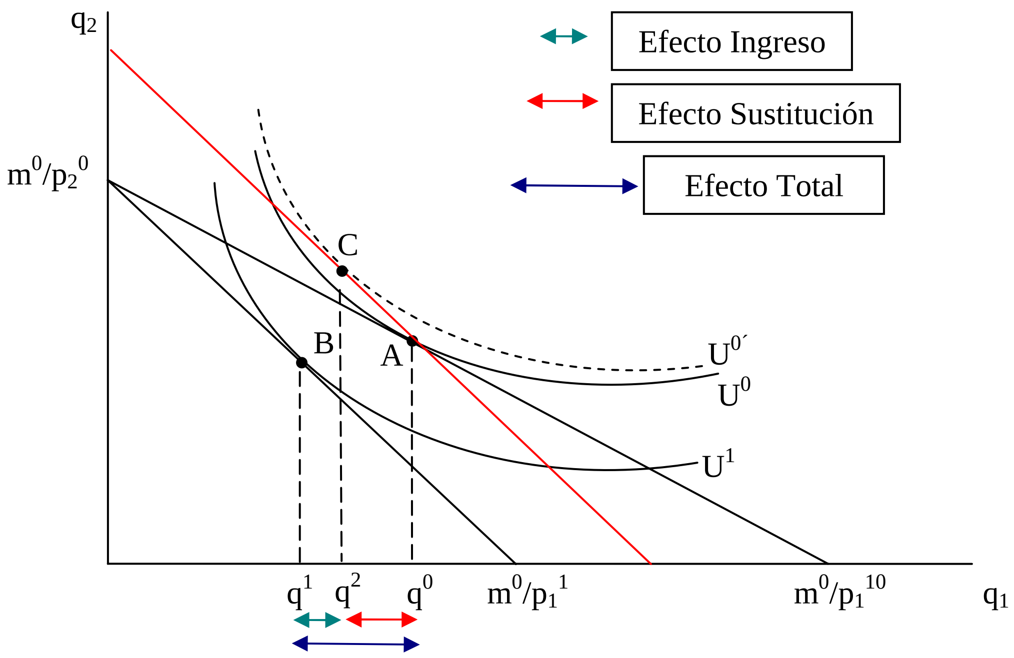


Figura 25: Efecto Sustitución y Efecto Ingreso de un Cambio (disminución) en el Precio del Bien 1 por el Enfoque de Slutsky.

Para entender mejor el pensamiento de Slutsky podemos pensar en un incremento del precio del bien 1. Con los precios nuevos la pregunta que tendríamos que responder es: ¿cuánto sería la cantidad de ingreso que se le debería dar al consumidor para que mantenga las cantidades de bienes que consumía antes del cambio en precio (antes del incremento)?. Ahora no necesitamos que la nueva recta de presupuesto (línea roja) sea tangente al nivel de utilidad inicial, U^0, en algún punto. Lo que necesitamos es que la nueva recta de presupuesto pase exactamente por el punto A. Es decir, que pase por el punto que determinaba las cantidades iniciales consumidas a los respectivos precios, como se aprecia en la anterior figura.

Lo que queremos averiguar es el cambio en el ingreso necesario para que el individuo, con los nuevos precios, siga comprando la misma cantidad consumida, y así de esta forma siga manteniendo su nivel de calidad de vida (su nivel de utilidad inicial antes del cambio en el precio). Ahora hablamos de la necesidad de contar con un índice del costo de la vida.

El Enfoque de Hicks “Compensación de Hicks”

Queremos averiguar, después del cambio, cuál es la cantidad de ingreso que se debe dar como compensación al consumidor para regresarlo al nivel de utilidad inicial. Para ver esto, supongamos una subida en el precio del bien 1, que provoca una disminución en el consumo.

Con la subida en el precio pasamos del punto A al punto B (el consumidor tiene un mayor nivel de utilidad). Desplazamos la nueva recta de presupuesto hacia arriba a la derecha (línea roja) hasta que sea tangente con el nivel de utilidad inicial para averiguar la compensación necesaria para mantener al consumidor en el nivel de utilidad inicial. En este caso, la cantidad de ingreso que se le debería dar al individuo para regresarlo al nivel de utilidad inicial, U^0. Esto se observa en la siguiente figura.

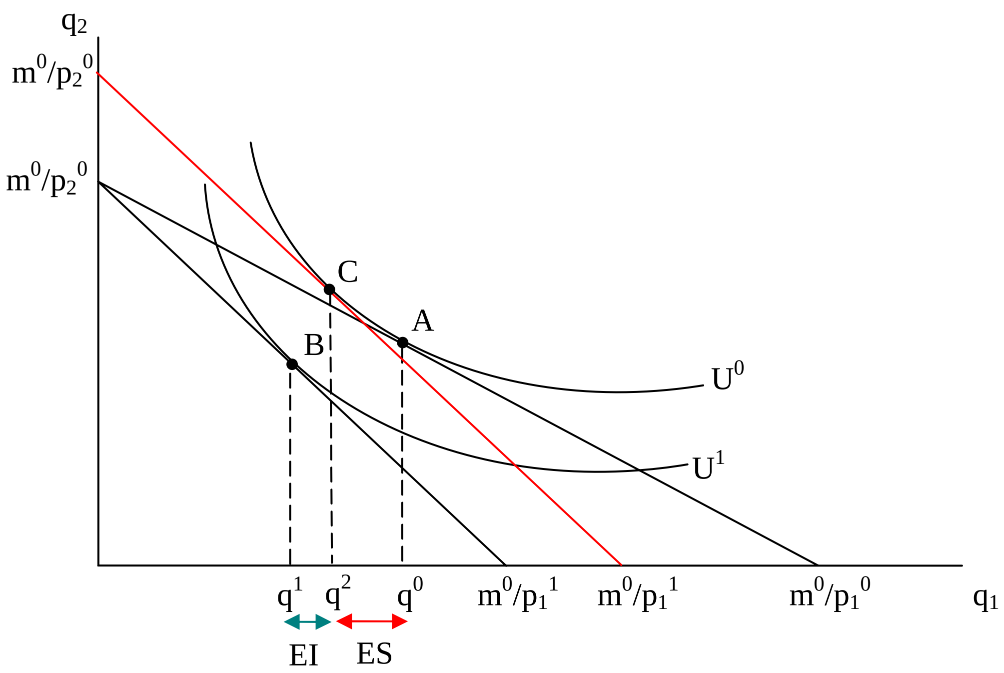


Figura 26: Efecto Sustitución y Efecto Ingreso de un Cambio (un incremento) en el Precio del Bien 1 por el Enfoque de Hicks.

Referente al anterior caso nos podemos preguntar, ¿qué podemos decir referente al efecto ingreso?: Con la compensación en el ingreso del consumidor hasta llevarlo al nivel de utilidad inicial, el consumo aumenta, pero no en la misma proporción que se tenía antes del cambio en el precio. Este incremento en el consumo es el efecto ingreso.

Luego, ¿qué podemos decir referente al efecto sustitución?: Ante una subida en el precio del bien 1, aún con la compensación, el individuo compra menos de éste bien cuyo precio subió (es más costoso en términos relativos) y compra más de otros bienes (menos costosos en términos relativos). ¿Cómo haríamos para medir esto?. Tenga en cuenta que no contamos con las curvas de indiferencia de utilidad. En cambio si contamos con información de precios y cantidades consumidas. Entonces, podemos usar la solución propuesta por Slutsky presentada anteriormente. La respuesta de Hicks ante el hecho de no poder estimar las curvas de indiferencia y, por consiguiente, no poder medir el cambio en bienestar del consumidor derivado del cambio en precios, fue la de proponer junto con Kaldor las medidas de disponibilidad a pagar Hicksianas que estudiaremos luego.

Por último, para cerrar esta sección, en el espacio de precios y cantidades, se presenta el efecto sustitución y el efecto ingreso, para el caso de una disminución en precio del bien 1:

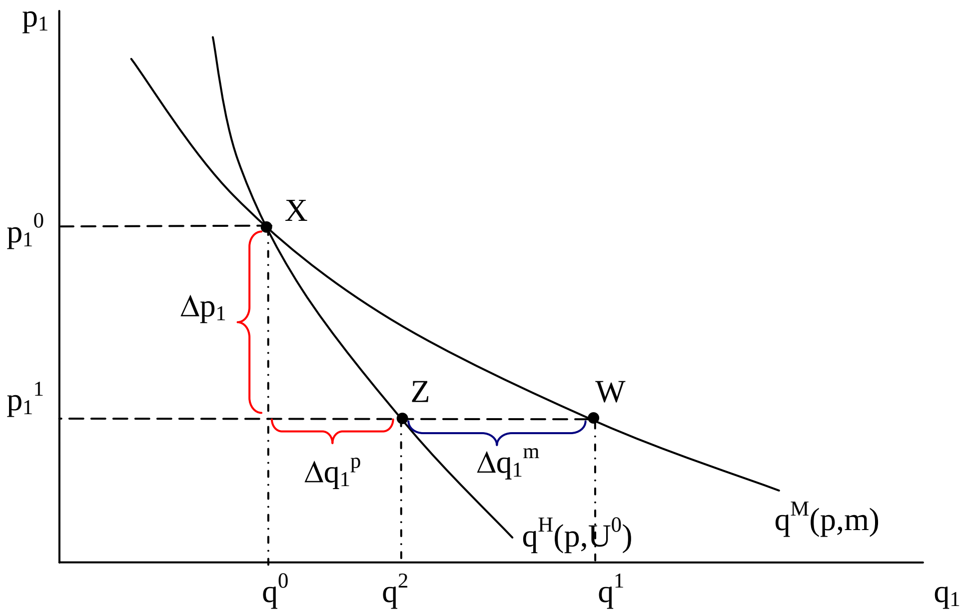


Figura 27: Cambio en la Cantidad del Bien 1 bajo el Efecto Sustitución y el Efecto Ingreso.

En la siguiente sección iniciamos el estudio de las medidas de disposición a pagar Hicksianas.

Medidas de Disposición a Pagar Hicksianas

En la clase anterior estudiamos el método de la integral de senda y concluimos que este método a partir del cumplimiento de una serie de supuestos (fuertes) puede ser una herramienta útil para estimar el cambio en el excedente del consumidor proveniente de cambios en precios e ingreso. Sin embargo, debido a que los supuestos asumidos son muy restrictivos, es necesario encontrar otras herramientas de medición.

El enfoque de disponibilidad, es otro enfoque alternativo de medición de los cambios en bienestar de consumidores, con un mayor grado de aplicabilidad.

Esta metodología se caracteriza por aplicar de manera intensiva el enfoque dual. Las medidas de bienestar fundamentales derivadas bajo este enfoque son la Variación Compensatoria Hicksiana (VC) y la Variación Equivalente Hicksiana (VE), Excedente Compensatorio Hicksiano (EC), Excedente Equivalente Hicksiano (EE).

Antes de iniciar el estudio de estas medidas hablaremos un poco acerca de por qué nos gustan estas medidas a los economistas del bienestar. Las medidas propuestas por Hicks nos gustan por que:

- Los supuestos son muy claros.
- Se pueden relacionar con la teoría del consumidor y el productor.
- Se puede relacionar con el criterio de compensación Kaldor Hicks Scitovsky.
- Estas medidas son fáciles para explicar a los políticos, se les puede informar quienes son los ganadores, quienes son los perdedores, cuanto se gana y cuanto se pierde. Si la política deja excedentes después de la compensación, la política es aceptada ya que deja beneficios netos positivos.
- Estas medidas ayudan a las personas que toman decisiones a entender cual es la mejor forma de entender como funciona el proceso de toma de decisiones.
- En la economía, el concepto base es la disposición a pagar, no la teoría del consumidor y del productor. Sin embargo, los teóricos como Samuelson, para convencerlos necesitamos relacionar el concepto de disposición a pagar con economía (relacionarlo con la teoría del consumidor, del producto, con la teoría de formación de precios, etc.).

Los conceptos de VC, VE, EC y EE guardan una estrecha relación con el enfoque de compensación de Hicks, donde, a partir de la búsqueda del efecto sustitución y del efecto ingreso las medidas que estamos estudiando definen la cantidad de dinero que hay que sustraer o dar al individuo después del cambio en precios o precios e ingreso.

Una vez que ya se ha estudiado la teoría relacionada con el efecto ingreso y el efecto sustitución entraremos a estudiar la teoría de medición del bienestar del consumidor ante cambios en precios. ¿Qué debemos tener en cuenta?: Deberíamos responder la pregunta de ¿por qué es tan importante medir los impactos sobre el bienestar del consumidor de los cambios en precios?.

Existen varias razones para tener interés sobre los cambios en precios. Una de estas radica en que los cambios en precios pueden generar efectos en el bienestar de los consumidores y productores, lo cual obviamente origina una serie de cambios en el nivel de satisfacción de la sociedad. Los cambios en precios pueden provenir principalmente de tres fuentes:

Primero, los cambios en precios pueden provenir de las medidas de política que pueda emprender el Gobierno y que básicamente producen precios diferentes al precio real que refleja con exactitud el costo marginal del bien. Como ejemplos de estas medidas de política se pueden citar a los famosos esquemas de impuestos o subsidios en determinados sectores de la economía que impiden que los consumidores y productores transen los bienes a su verdadero valor.

Segundo, los cambios tecnológicos, como el caso de las tecnologías limpias, los cuales básicamente provocan cambios en los niveles de precios iniciales de los bienes que ofrecen las empresas mediante cambios en la producción o por medio de la reducción de la cantidad de insumos utilizados en el proceso de producción. Por ejemplo, en la industria de producción de papel en donde la adquisición de maquinas con mayor tecnología hace que se produzca una mayor cantidad de papel utilizando la misma cantidad de insumos del proceso de producción original. Bajo el supuesto de que la empresa puede influenciar el precio de mercado, el cambio en el proceso de producción de esta empresa muy seguramente provocará el cambio de precio del bien en el mercado repercutiendo directamente sobre el bienestar de productores y consumidores.

Tercero, a través de la presencia de eventos exógenos no esperados que causan trastornos en la periodicidad que sigue la producción de ciertos bienes. Esto es muy común para el caso de los bienes agrícolas donde los eventos climáticos no esperados, como por ejemplo, el fenómeno de niño, o el problema de calentamiento global y variación del clima alrededor del mundo, específicamente los casos de heladas o sequías, traen con sigo problemas de disponibilidad de bienes de consumo para la sociedad originando escasez que se manifiesta en los mercados en términos de cambios en los precios de los bienes y, por consiguiente, en cambios en el bienestar de los productores y consumidores.

Al final, todos los cambios de precios independientemente de cual sea su causa pueden traer consigo impactos significativos sobre el bienestar de la sociedad. Es ahí donde radica la importancia de estudiar cuidadosamente las medidas de bienestar con el objetivo de poder estimar tales impactos y así poder obtener evidencia empírica que pueda ayudar a los tomadores de decisiones de política a elegir la mejor alternativa con el objetivo de minimizar los impactos en el bienestar generados a partir de los cambios en precios.

Directamente del enfoque de compensación propuesto por Hicks salen un conjunto de medidas de bienestar del consumidor con más estructura desde el punto de vista económico. Estas medidas (VC y VE) son utilizadas para medir el cambio en el bienestar del consumidor derivado de cambios en precios. Las medidas utilizan como referencia el nivel de utilidad, los precios y el derecho de propiedad sobre un nivel de utilidad u otro.

En total las medidas propuestas por Hicks son cuatro: la variación compensatoria (VC), la variación equivalente (VE), el excedente compensatorio (EC) y el excedente equivalente (EE). Las dos últimas medidas son utilizadas para estimar cambios en bienestar cuando éste cambio se deriva de un cambio en cantidades, como por ejemplo, un cambio en la dotación de un bien público. Las anteriores son medidas de bienestar del consumidor exactas debido a que ellas se estiman a partir el área por debajo de la curva de demanda Hicksiana y recordemos que la demanda Hicksiana tiene como variable explicativa a la utilidad, por consiguiente, la medición se puede hacer de manera exacta con respecto a un nivel de utilidad de referencia que puede ser la utilidad inicial (antes del cambio de precio) o la utilidad final (después del cambio de precio). A continuación se define cada una de estas medidas:

VC: es la máxima cantidad de dinero que hay que sustraer del individuo (posiblemente negativa) para dejarlo en el nivel de utilidad inicial con los precios finales. El consumidor tiene derecho a recomponer su canasta de consumo después del cambio en precios.

Bajo la VC, el individuo tiene derecho a la situación inicial, el nivel de utilidad de referencia es el inicial y el precio de referencia es el final.

VE: es la mínima cantidad de dinero que hay que dar al individuo (posiblemente negativa) para dejarlo en el nivel de utilidad final como si los precios hubiesen cambiado. El consumidor tiene derecho a recomponer su canasta de consumo después del cambio en precios.

Bajo la VE, el individuo tiene derecho a la situación final, el nivel de utilidad de referencia es el final y el precio de referencia es el inicial.

Entonces:

Tabla 5: Precios y Utilidad de Referencia de la VC y de la VE.

Medida de Bienestar →	VC	VE
Precios	Finales (p^1)	Iniciales (p^0)
Utilidad	Inicial (U^0)	Final (U^1)

EC: es la máxima cantidad de dinero que hay que sustraer del individuo (posiblemente negativa) para dejarlo en el nivel de utilidad inicial con la nueva dotación del bien público.

Bajo el EC, el individuo tiene derecho a la situación inicial, el nivel de utilidad de referencia es el inicial y la dotación del bien público es la final.

EE: es la mínima cantidad de dinero que hay que dar al individuo (posiblemente negativa) para dejarlo en el nivel de utilidad final como si hubiese cambiado la dotación del bien público.

Bajo el EE, el individuo tiene derecho a la situación final, el nivel de utilidad de referencia es el final y la dotación del bien público es la inicial.

Luego, después de presentar las definiciones de estas medidas pasaremos a estudiarlas con la ayuda de figuras y las definiremos de tres maneras diferentes: definición implícita (usando la función de utilidad indirecta), definición explícita (usando la función de mínimo gasto) y a través de la estimación de un área (usando el concepto de integral).

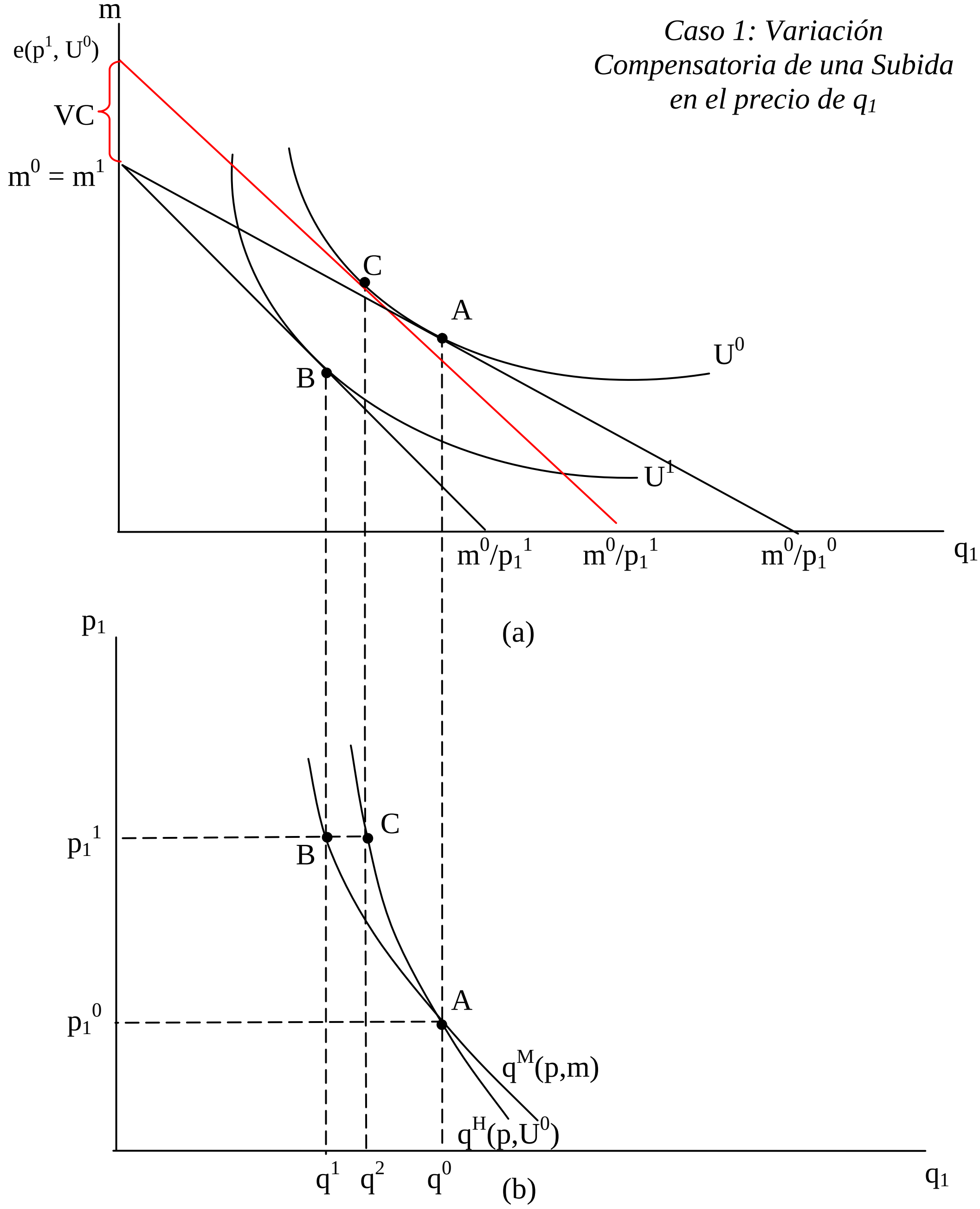


Figura 28: Variación Compensatoria de una Subida en el Precio del Bien 1.

Tenga en cuenta también que ahora en el eje de las Y se tiene el ingreso que representa el gasto en los otros bienes diferentes a q_1. Para poder representar m en el eje de las Y, se supone que los precios de los bienes 2 hasta el n-ésimo son numerarios, es así como m queda expresado en términos de dotaciones, lo cual permite pintar las curvas de indiferencia en el espacio de cantidades (parte a de la anterior figura). Adicionalmente, tenga en cuenta de que por definición el ingreso inicial es igual al gasto inicial, $m^0 = e(p^0, u^0)$, y el ingreso final es igual al gasto final, $m^1 = e(p^1, u^1)$. A partir de la figura 41 se presentan gráficamente los cuatro casos para la VC y la VE: (1) la VC para una subida, (2) la VC para una baja en el precio, (3) la VE para una subida en el precio, (4) la VE para una baja en el precio. Los dos primeros casos referentes a la VC utilizan como utilidad de referencia, el nivel de utilidad inicial, mientras que la VE, en sus dos casos, utiliza como referencia el nivel de utilidad final. Tanto la VC como la VE se pueden interpretar en términos de la máxima disponibilidad a pagar o la mínima disponibilidad a aceptar según el cambio de precio.

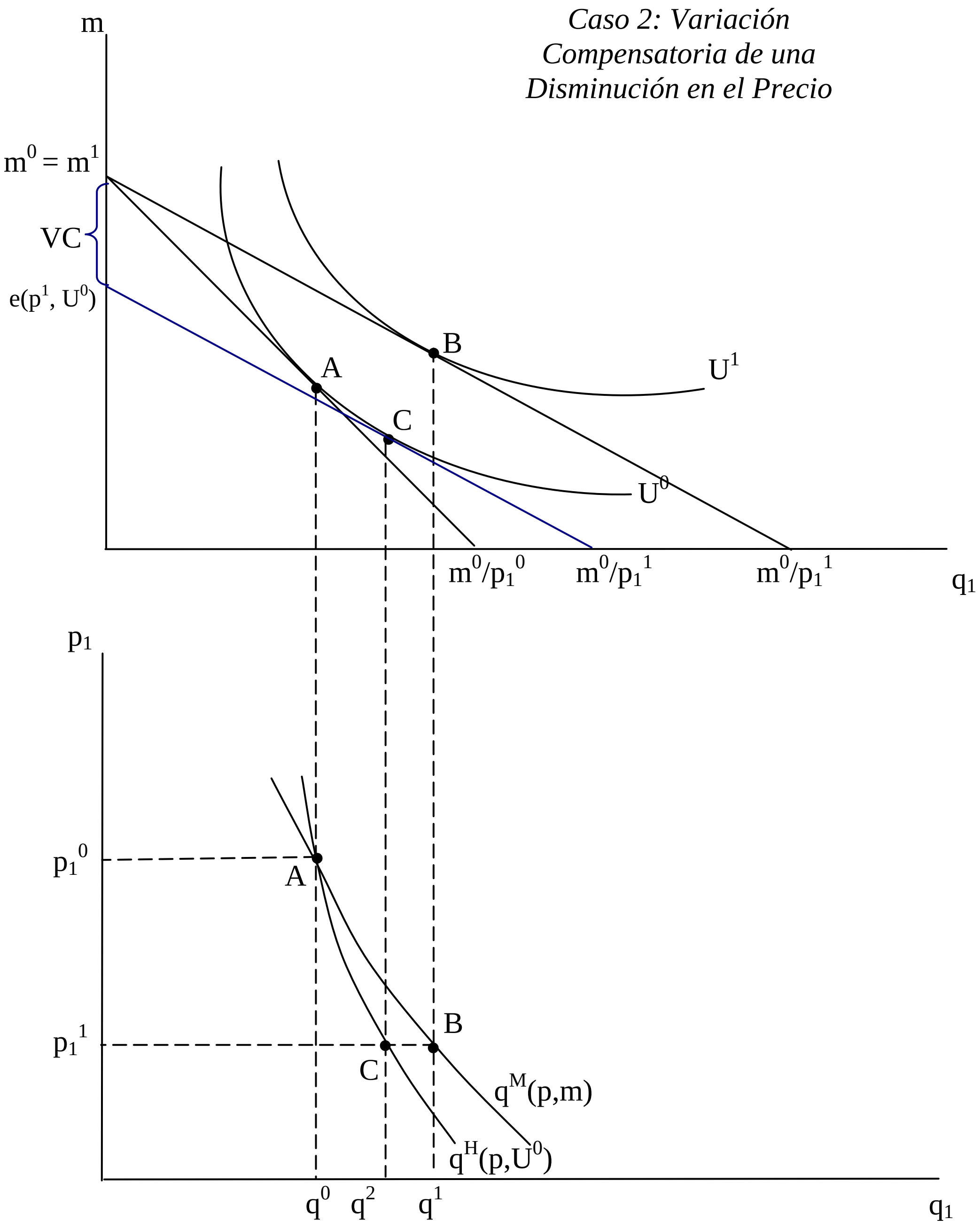


Figura 29: Variación Compensatoria de una Disminución en el Precio del Bien 1.

En la figura 41, la VC de una baja en el precio equivale a la mínima disposición a aceptar del individuo por renunciar a comprar el bien 1 a un precio más bajo. Esto debido a que el individuo bajo la VC tiene derecho a la situación inicial que implica comprar a un menor precio el bien 1, no a la situación final donde el precio es mayor. Obseve que la VC en la figura 41 es el área ($p_1^0 p_1^1$BA), mientras que el ΔEC es el área ($p_1^0 p_1^1$CA), luego el ΔEC sobrestima la VC, para el caso de una subida en el precio.

En la figura 42, que la VC es la cantidad de ingreso que hay que quitar al individuo para dejarlo en el nivel de utilidad inicial (parte a de la anterior figura). Esa distancia equivale, en el espacio de precios y cantidades (parte b de la anterior figura), al área ($p_1^0p_1^1BA$). Note también que cambio en el excedente del consumidor es el área ($p_1^0p_1^1CA$), por consiguiente, para una subida en el precio del bien 1, el cambio en el excedente del consumidor sobre estima a la variación compensatoria [($p_1^0p_1^1BA$) < ($p_1^0p_1^1CA$)].

En este caso la VC para una baja en el precio del bien 1 sería la máxima disposición a pagar del individuo por acceder a comprar el bien 1 a un precio más bajo. Esto por que el tiene el derecho al estado inicial, donde el precio del bien 1 es mayor. Ahora solo queda por estudiar la VE para una subida y una disminución en el precio. Veamos esto a través de las figuras 43 y 44.

Para el caso de una subida en el precio del bien 1, lo que se produce es una contracción de la curva de indiferencia de utilidad, pasando de un nivel de utilidad inicial mayor a un nivel de utilidad final menor. Luego, la variación equivalente representaría la máxima cantidad de dinero que el individuo esta dispuesto a pagar para evitar llegar al empeoramiento, esto debido a que bajo la VE el individuo tiene derecho a la situación final, es decir, a la situación con el precio del bien 1 mayor.

En el caso de una baja en el precio, lo que sucede es un desplazamiento de la curva de indiferencia de utilidad hacia arriba a la derecha, esto significa que el consumidor pasa de un nivel de utilidad inicial menor a un nivel de utilidad final mayor. Luego, si bajo la VE el individuo tiene derecho a la situación final, es decir, tiene derecho a la situación con el precio del bien 1 menor, en este caso debería estar dispuesto a aceptar una mínima cantidad de dinero como compensación por renunciar a los beneficios de comprar el bien 1 a un precio más bajo. En resumen:

Tabla 6: Variación Compensatoria y Equivalente para Cambios en Precios.

Variación Compensatoria		Variación Equivalente	
Baja en el Precio	Subida en el Precio	Baja en el Precio	Subida en el Precio
Max dap	Min daa	Min daa	Max dap

Note que la VC de una baja en el precio equivale a la VE de una subida en el precio y la VC de una subida en el precio equivale a la VE de una baja en el precio.

Usando la función de utilidad indirecta podemos definir implícitamente la VC y la VE de la siguiente manera:

$$V(p^1, m^1 - VC) = V(p^0, m^0) = U^0$$
$$V(p^0, m^0 + VE) = V(p^1, m^1) = U^1$$

Si obtenemos los parámetros de la función de utilidad indirecta, podemos usar esta función (reemplazando precios e ingreso iniciales y finales) para obtener directamente la VC o la VE. Usando la función de mínimo gasto (como se observaba en las figuras) podemos definir de manera explícita la VC y la VE para un cambio en precio de la siguiente manera:

$$VC = e(p^0, U^0) - e(p^1, U^0)$$
$$VE = e(p^0, U^1) - e(p^1, U^1)$$

La VE sería el área entre los precios y por debajo de la curva de demanda de Hicksiana y el excedente del consumidor es el área por debajo de la curva de demanda Marshalliana entre los precios. Esto se aprecia tanto en la figura 43 como en la figura 44.

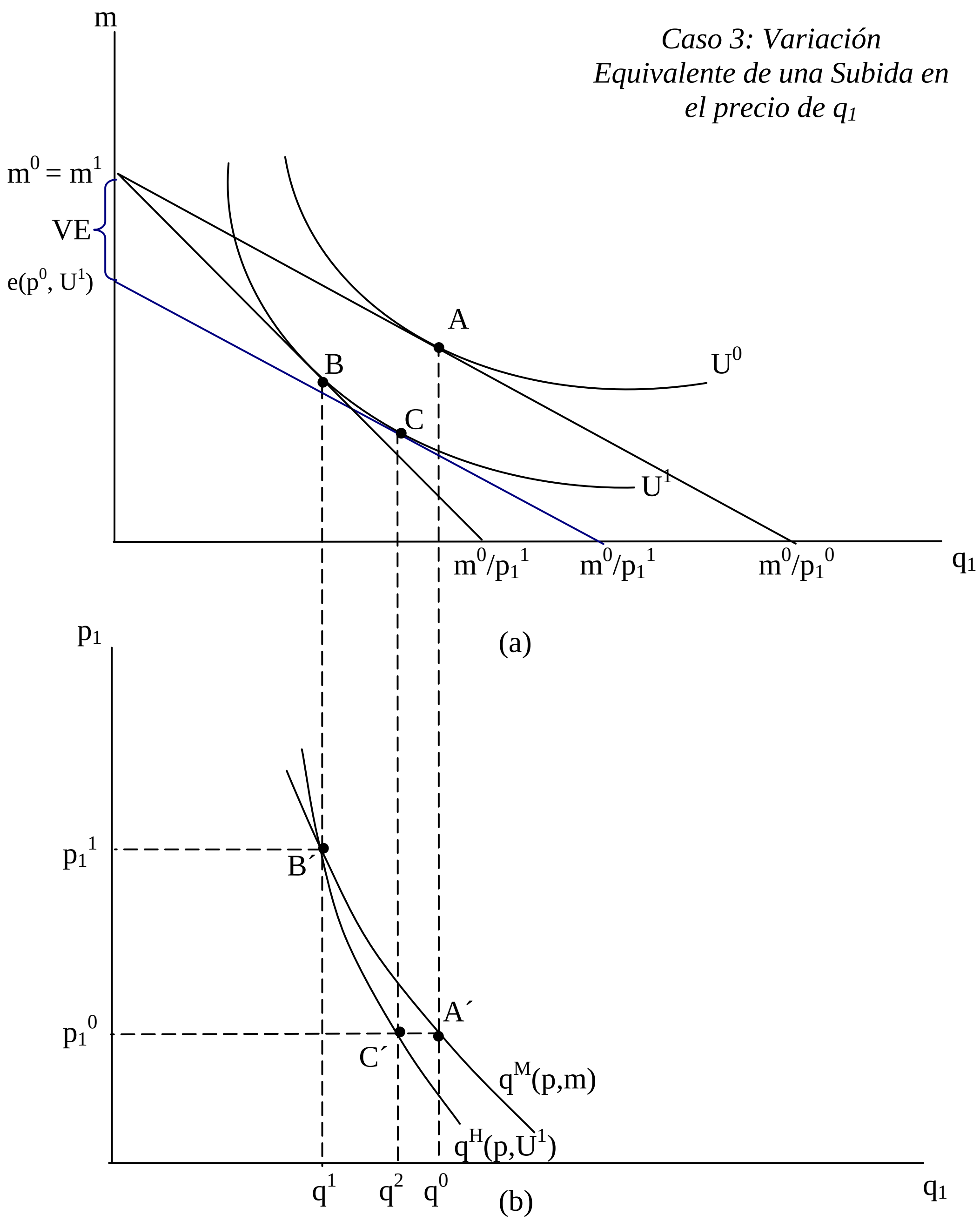


Figura 30: Variación Equivalente de una Subida en el Precio del Bien 1.

De la definición explícita para la VC y la VE podemos obtener directamente una expresión en términos de una integral que permita estimar estas medidas a partir de las demandas Hicksianas. Por el Lema de Sheppard sabemos que el cambio en la función de mínimo gasto con respecto al ingreso resulta siendo igual a la demanda Hicksiana, luego a partir de su obtención podemos estimar el área bajo esta curva de demanda y obtener la VC si el nivel de utilidad de referencia es el inicial y la VE si el nivel de utilidad de referencia es el final.

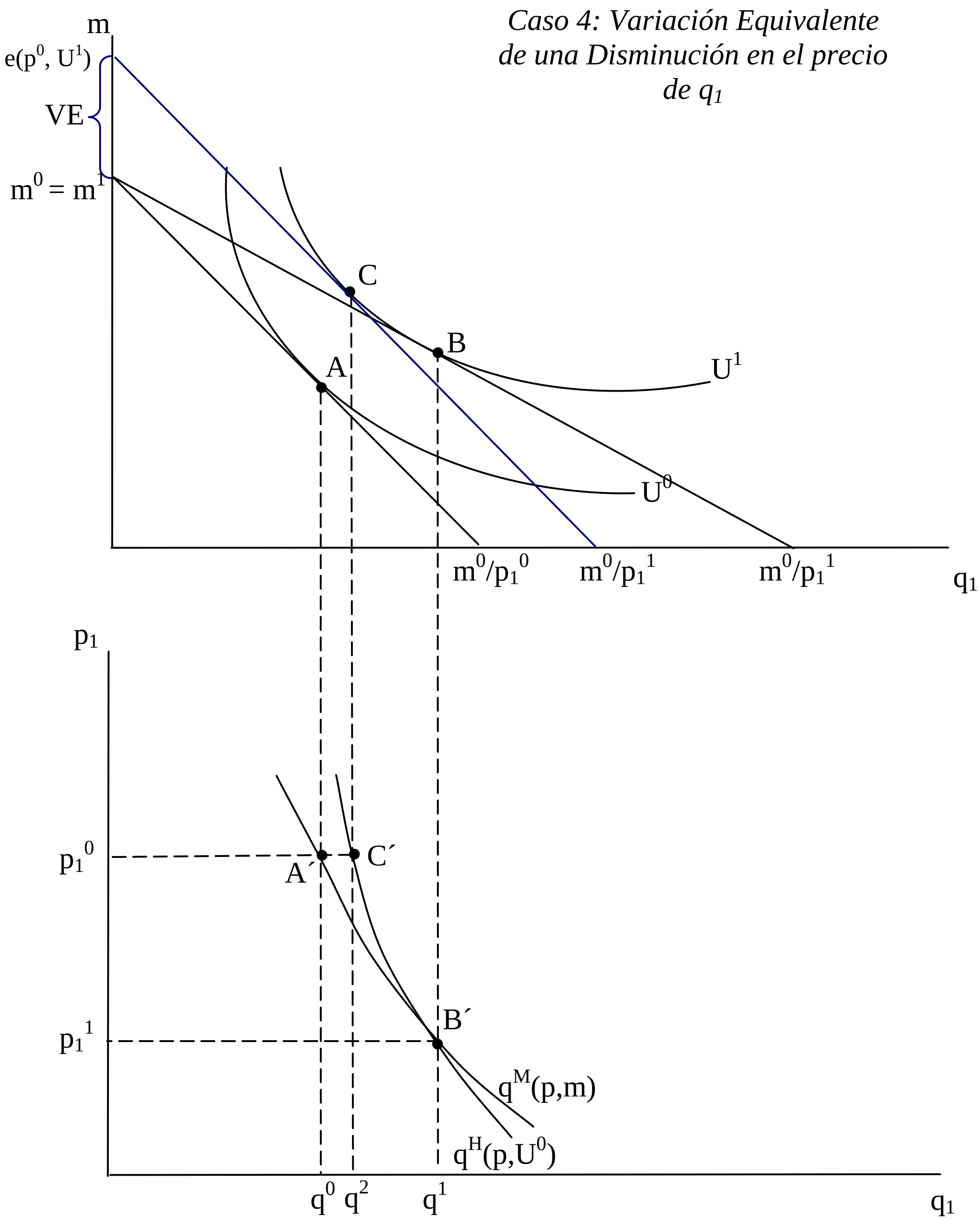


Figura 31: Variación Equivalente de una Disminución en el Precio del Bien 1.

La definición explícita de la VC utilizando la función de mínimo gasto para un cambio en precio sería:

$$VC = e(p^0, U^0) - e(p^1, U^0)$$

Esta medida la puede derivar directamente de la figura 41 o de la figura 42. De igual manera, para la VE tendríamos algo parecido:

$$VE = e(p^1, U^1) - e(p^0, U^1)$$

A partir de la definición explícita podemos obtener en términos de integrales la VC y la VE para un cambio en precio. Para la VC, tendríamos:

$$VC = e(p^0, U^0) - e(p^1, U^0)$$
$$VC = de(p, U^0)$$

Si el cambio en el mínimo gasto con respecto al precio es:

$$de(p, U^0) = \frac{\partial e(p, U^0)}{\partial p} dp$$

Y por el lema de Sheppard la derivada del gasto con respecto al precio es la demanda Hicksiana. Luego, reemplazando, tenemos una expresión para la VC:

$$VC = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \bar{q}(p_i, U^0) dp_i$$

Para la VE, sería:

$$VE = e(p^1, U^1) - e(p^0, U^1)$$
$$VE = de(p, U^0)$$

Si el cambio en el mínimo gasto con respecto al precio es:

$$de(p, U^1) = \frac{\partial e(p, U^1)}{\partial p} dp$$

Y por el lema de Sheppard la derivada del gasto con respecto al precio es la demanda Hicksiana. Luego, reemplazando, tenemos una expresión para la VE:

$$VE = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \bar{q}(p_i, U^1) dp_i$$

Esta medición se puede hacer para todo bien i = 1, ….n, cuyo precio cambie. Al final, en términos de integrales, las tres medidas estudiadas son:

Tabla 7: VC, ΔEC y VE para un cambio en precio bajo diferentes enfoques de medición.

Medida de Bienestar	
Variación Compensatoria	Definición Implícita $V(p^1, m^1 - VC) = V(p^0, m^0) = U^0$

	Definición Explícita $$VC = e(p^0, U^0) - e(p^1, U^0)$$ Integral de Senda $$VC = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \bar{q}(p_i, U^0) dp_i$$
Cambio en el Excedente del Consumidor	Integral de Senda $$\Delta S = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}(p_i, m) dp_i$$
Variación Equivalente	Definición Implícita $$V(p^0, m^0 + VE) = V(p^1, m^1) = U^1$$ Definición Explícita $$VE = e(p^1, U^1) - e(p^0, U^1)$$ Integral de Senda $$VE = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \bar{q}(p_i, U^1) dp_i$$

Medidas de Disposición a Pagar Hicksianas para Cambios en Cantidades.

Los cambios en bienestar del consumidor no pueden originarse solo por cambios en precios y en el ingreso. También pueden darse cambios en cantidades, como por ejemplo, un cambio en la dotación de un bien público que genere cambios en el bienestar del consumidor. Las dos medidas de bienestar teóricas propuestas por Hicks para evaluar los cambios en el bienestar del consumidor cuando cambian cantidades son el excedente compensatorio (EC) y el excedente equivalente (EE).

EC: El excedente equivalente es la máxima cantidad de dinero que hay que sustraer del individuo (posiblemente negativa) para dejarlo en el nivel de utilidad inicial con el nivel final del bien Q^1. Bajo el *C*, el individuo tiene derecho a la situación inicial, el nivel de utilidad de referencia es el inicial y la cantidad de referencia es la final.

EE: El excedente equivalente es la mínima cantidad de dinero que hay que dar al individuo (posiblemente negativa) para dejarlo en el nivel de utilidad final como si hubiese cambiado la cantidad o calidad del bien. Bajo el *E*, el individuo tiene derecho a la situación final, el nivel de utilidad de referencia es el final y la cantidad de referencia es la inicial.

En términos gráficos el excedente compensatorio y el excedente equivalente para un cambio en cantidades se presentan en las figura 47 y 48:

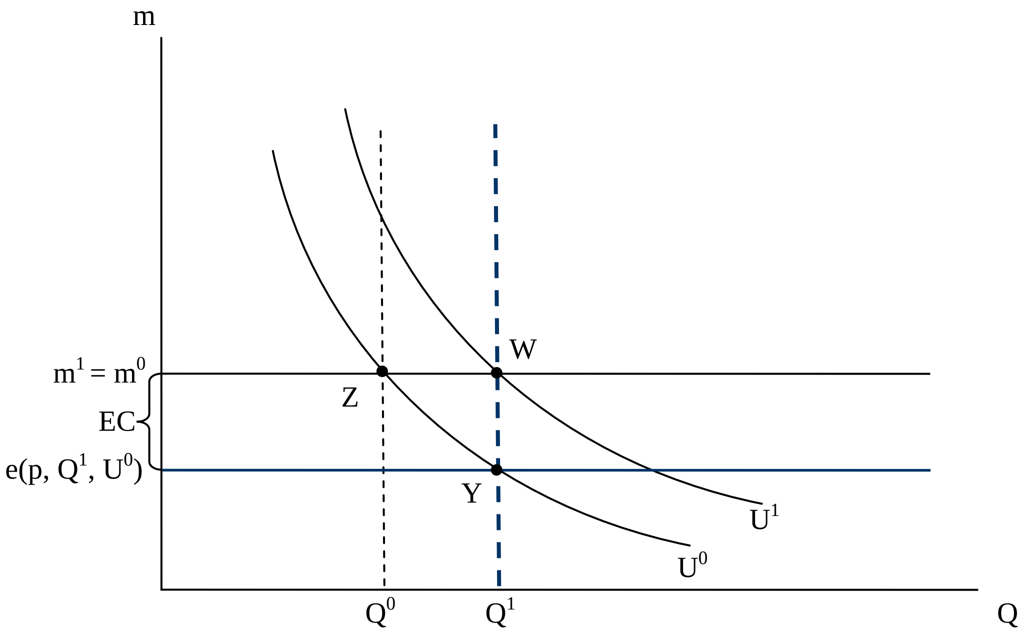


Figura 32: Excedente Compensatorio de un cambio en Cantidades.

Note, como con el incremento en cantidades, por ejemplo, un incremento que la dotación de un bien público, hace que el individuo pase de un nivel de utilidad inicial menor a un nivel de utilidad final mayor (pasa del punto Z al punto W). Como Q no tiene precio, note que la recta de presupuesto es totalmente horizontal. El excedente compensatorio, C, para medir el cambio en el bienestar del consumidor sería la cantidad de dinero que hay se sustraer del individuo para dejarlo de nuevo en el nivel de utilidad inicial, pero con la nueva cantidad del bien público, Q^1. Esto equivale a la diferencia entre m^0 y $e(p, Q^1, U^0)$, equivalente a C en la figura 47. El individuo pasa del punto W al punto Y. Luego, el excedente compensatorio sería equivalente a:

$$EC = e\left(p, Q^0, U^0\right) - e\left(p, Q^1, U^0\right)$$

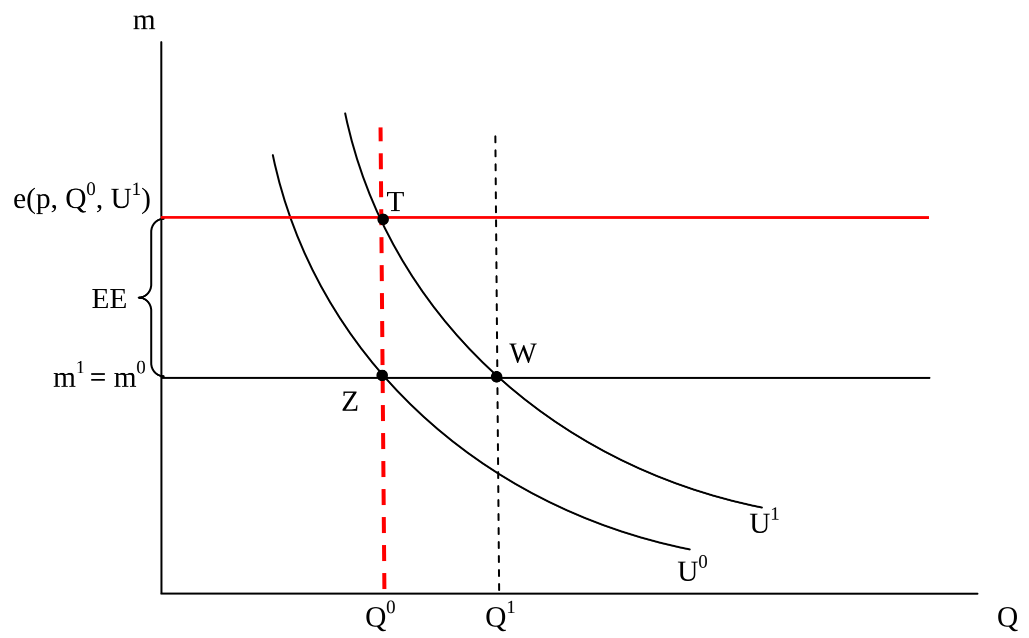


Figura 33: Excedente Equivalente de un cambio en Cantidades.

Con el aumento en la dotación del bien público, el individuo pasa de un nivel de utilidad inicial menor a un nivel de utilidad final mayor (pasa del punto Z al punto W). El excedente equivalente, E, para medir el cambio en el bienestar del consumidor sería la cantidad de dinero que hay que dar al individuo para dejarlo de en el nivel de utilidad final, pero con la cantidad original del bien público, Q^0. Esto equivale a la diferencia entre m^0 y $e(p, Q^0, U^1)$, equivalente a E en la figura 48. El individuo pasa del punto W al punto Y. Luego, el excedente compensatorio sería equivalente a:

$$EE = e\left(p, Q^1, U^1\right) - e\left(p, Q^0, U^1\right)$$

El C tiene como referencia la cantidad final y el nivel de utilidad inicial y E tiene como referencia la cantidad inicial y el nivel de utilidad final. Esto se resume en la tabla 9.

Tabla 8: Cantidades y Utilidad de Referencia del Excedente Compensatorio (C) y del Excedente Equivalente (E).

Medida de Bienestar →	C	E
Cantidad	Finales (Q^1)	Iniciales (Q^0)
Utilidad	Inicial (U^0)	Final (U^1)

Al igual que en el caso de la VC y la VE, el C y el E tienen interpretaciones en términos de la máxima disposición a pagar y la mínima disposición a aceptar.

Tabla 9: Excedente Compensatorio y Excedente Equivalente para un Cambio en Cantidad.

Excedente Compensatorio		Excedente Equivalente	
Disminución en Q	Aumento en Q	Disminución en Q	Aumento en Q
Min daa	Max dap	Max dap	Min daa

Note, en términos de disposiciones a pagar y aceptar, como el excedente compensatorio de un aumento en cantidades equivale al excedente equivalente de una disminución en cantidades. Y como el excedente compensatorio de una disminución en cantidades equivale a un excedente equivalente de un aumento en cantidades.

Salvo cuando estamos midiendo los cambios en el bienestar de los consumidores ante cambios en la dotación de bienes públicos o de bienes provistos por el gobierno (con excedente compensatorio o equivalente), lo más común es utilizar la variación compensatoria y equivalente. Dependiendo del tipo de cambio (mejora o empeoramiento) estas medidas se interpretan en términos de máximas disposiciones a pagar o mínimas disposiciones a aceptar.

Por último, recuerde, que como los cambios en cantidades son exógenos al problema de elección del consumidor, para Q no tenemos una demanda Marshalliana que represente las cantidades óptimas que maximizan la utilidad del consumidor. Es decir, las cantidades de un bien público y en general de Q (como calidad del aire) el consumidor las considera como dadas.

Apéndice Matemático

Ejercicio 1: Suponga la siguiente función Cobb-Douglas con preferencias homotéticas, el cual es un caso especial de preferencias cuasi – homotéticas.[1]

$$u = q_1^{\alpha} q_2^{1-\alpha}$$

y la restricción de presupuesto igual a $p_1q_1 + p_2q_2 = m$, entonces la función de utilidad indirecta es:

$$v(p_1, p_2, m) = \underset{q_1, q_2}{Max}\left\{q_1^{\alpha} q_2^{1-\alpha} \middle| p_1q_1 + p_2q_2 = m\right\} = \tilde{q}_1^{\alpha}\tilde{q}_2^{1-\alpha}$$

Donde $\tilde{q}_1 = \dfrac{\alpha m}{p_1}$ y $\tilde{q}_2 = \dfrac{(1-\alpha)m}{p_2}$ son las funciones de demanda Marshallianas respectivamente para q_1 y q_2, ayudando a obtener la solución de la elección optima de las cantidades de ambos bienes. Por lo tanto,

$$v(p_1, p_2, m) = \left(\frac{\alpha m}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{(1-\alpha)m}{p_2}\right)^{1-\alpha} = \alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\frac{m}{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}} = \frac{Km}{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}}.$$

[1] Se dice que las preferencias son cuasi-homotéticas cuando la función de gastos tiene la forma polar Gorman (Gorman polar form) igual $e(p_1, p_2, u) = a(p_1, p_2) + u.b(p_1, p_2)$, Deaton & Muellbauer (1980, pag 142-145). Las preferencias cuasi – homotéticas son necesarias y suficientes para la agregación lineal exacta. Es decir, si todos las consumidores tienen preferencias son cuasi – homotéticas podemos trabajar el análisis de bienestar social a partir de un consumidor representativo.

La función de gasto $e(p_1, p_2, u)$ puede ser encontrada con mayor facilidad a partir de la función de utilidad indirecta recurriendo al proceso de invertibilidad. Es decir,

$$e(p_1, p_2, u) = v^{-1}(p_1, p_2, u) = \frac{p_1^{\alpha}, p_2^{1-\alpha}, u}{K}$$

Utilizando la identidad de Roy, podemos encontrar las ecuaciones de demanda marshallianas a partir de la función de utilidad indirecta:

$$-\frac{\partial v / \partial p_1}{\partial v / \partial m} = \tilde{q}_1(p_1, p_2, m) = \frac{\alpha m}{p_1}$$

$$-\frac{\partial v / \partial p_2}{\partial v / \partial m} = \tilde{q}_2(p_1, p_2, m) = \frac{(1-\alpha) m}{p_2}$$

Donde $\partial v / \partial m$ es por definición la utilidad marginal del ingreso. Es decir:

$$\lambda = \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{K}{p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}} = \lambda(p_1, p_2)$$

Es muy interesante observar que en este caso λ es constante con respecto al ingreso, pero no con respecto a los precios. Por otra parte, por medio del Lema de Sheppard, las ecuaciones de demanda hicksianas para q_1 y q_2, respectivamente son:

$$\bar{q}_1(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = \left(\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha) p_1} \right)^{1-\alpha} u = \tilde{q}_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

$$\bar{q}_2(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_2} = \left(\frac{p_1}{p_2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right)^{\alpha} u = \tilde{q}_2(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u))$$

En cambio, la variación compensatoria puede ser definida implícitamente para un cambio en el precio de q_1 de p_0^0 hasta p_0^1 como:

$$v(p_1^1, p_2^0, m^0 - VC) = v(p_1^0, p_2^0, m^0) = u^0$$

Tomando la inversa con respecto a $m^0 - VC$, resulta:

$$m^0 - VC = v^{-1}(p_1^1, p_2^0, u^0) = e(p_1^1, p_2^0, u^0)$$

O también:

$$VC = m^0 - e(p_1^1, p_2^0, u^0) = m^0 - e(p_1^1, p_2^0, v(p_1^0, p_2^0, m^0))$$

$$VC = m^0 - \left(\frac{p_1^1}{p_1^0}\right)^\alpha m^0 = m^0\left(1 - \left(\frac{p_1^1}{p_1^0}\right)^\alpha\right)$$

Tal que $m^0 = e(p_1^0, p_2^0, u^0)$, entonces:

$$VC = e(p_1^0, p_2^0, u^0) - e(p_1^1, p_2^0, u^0) = -\Delta e(p_1, p_2^0, u^0)$$

Y:

$$\Delta e = \int_{p_1^0}^{p_1^1} de(p_1, p_2^0, u^0) = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\partial e(p_1, p_2^0, u^0)}{\partial p_1} dp_1 = \int_{p_1^0}^{p_1^1} \overline{q}_1(p_1, p_2^0, u^0) dp_1$$

Por consiguiente, la variación compensatoria es igual a:

$$VC = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \overline{q}_1(p_1, p_2^0, u^0) dp_1 = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} u^0 \left(\frac{\alpha p_2^0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} p_1{}^{\alpha-1} dp_1$$

La cual después de integrar con respecto a p_1, y sustituyendo $V(p_1^0, p_2^0, m^0)$ por u^0 da como resultado la misma expresión para la variación compensatoria encontrada al inicio:

Refiriéndonos ahora a la otra medida de bienestar, la variación equivalente, esta por definición es igual a:

$$v(p_1^0, p_2^0, m^0 + VE) = v(p_1^1, p_2^0, m^0) = u^1$$

O también:

$$\frac{K(m^0 + VE)}{(p_1^0)^\alpha (p_2^0)^{1-\alpha}} = u^1 = \frac{Km^0}{(p_1^1)^\alpha (p_2^0)^{1-\alpha}}$$

O también:

$$m^0 + VE = v^{-1}(p_1^0, p_2^0, u^1) = e(p_1^1, p_2^0, u^1)$$

Y finalmente:

$$VE = (p_1^0, p_2^0, u^1) - m^0 = e(p_1^0, p_2^0, v(p_1^1, p_2^0, m^0)) - m^0$$
$$VE = m^0\left(\frac{p_1^0}{p_1^1}\right)^\alpha - m^0 = m^0\left(\left(\frac{p_1^1}{p_1^0}\right)^\alpha - 1\right)$$

Es muy útil observar que la expresión anterior es el negativo de la variación compensatoria:

$$VE(p_1^0, p_1^1, u^1) = -VC(p_0^1, p_0^0, u^0)$$

Y, si tomamos en cuente que por definición el excedente del consumidor es igual a:

$$\Delta S = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}(p_1, p_2^0, m^0)dp_1$$

$$\Delta S = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \frac{\alpha m^0}{p_1} dp_1 = -m^0 \ln p_1^\alpha \Big|_{p_1^0}^{p_1^1} = -m^0 \ln\left(\frac{p_1^1}{p_1^0}\right)^\alpha$$

Ejercicio 2: Suponga una función de utilidad cuasilineal (otro caso especial de preferencias cuasi - homotéticas).

Esta función de utilidad se encuentra representada como:

$$u = q_2 + q_1^\alpha$$

Y la restricción de presupuesto expresada como *p1q1 + q2 = m*, donde $p_2 = 1$, entonces:

$$V(p_1, 1, m) = \underset{q_1, q_2}{Max}\left\{q_2 + q_1^\alpha \,\middle|\, p_1 q_1 + q_2 = m\right\} = \tilde{q}_2 + \tilde{q}_1^\alpha$$

Donde:

$$\tilde{q}_1 = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{y} \quad \tilde{q}_2 = m - \left(\frac{\alpha}{p_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En este caso:

$$V = m - \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{p_1^{\ \alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Y:

$$e(p_1, u) = u + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{p_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

También:

$$\bar{q}_1 = \left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \text{y} \quad \bar{q}_2 = m - \left(\frac{\alpha}{p_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Note en este caso que las demandas Marshallianas son idénticas a las demandas Hicksianas. También la utilidad marginal del ingreso λ es igual a 1 y por consiguiente es consistente con respecto al precio de bien, finalmente, tenemos $\partial\tilde{q}_1/\partial m = \partial\overline{q}_1/\partial u = 0$.

En este caso, la variación compensatoria y equivalente y el cambio en el excedente del consumidor son todos iguales para un cambio de precios de p_1^0 hasta p_1^1 y pueden ser calculados de manera similar como en el ejercicio anterior. La expresión para la VC sería:

$$VC = m^0 - e(p_1^1, u^0)$$

$$VC = e(p_1^0, u^0) - e(p_1^1, u^0)$$

$$VC = (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(p_1^{0\frac{\alpha}{1-\alpha}} - p_1^{1\frac{\alpha}{1-\alpha}})$$

$$VC = \Delta C = VE$$

Ejercicio 3 Un Ejercicio con una Función de Utilidad Tipo Cobb Douglas.

Suponga la siguiente función de utilidad:

$$U(q_1, q_2) = q_1^{0.6} q_2^{0.4}$$

Y los valores de precio inicial y final e ingreso: p_1^0 = \$ 6, p_1^1 = \$ 3, p_2^0 = \$ 1, p_2^1 = \$ 1, $m^0 = m^1$ = \$ 50.

- Encuentre las demandas Marshallianas por los bienes 1 y 2.
- Estime el cambio en el excedente del consumidor (ΔS) para el cambio en el precio del bien 1.
- Encuentre la función de utilidad indirecta y estime su valor a los precios e ingreso iniciales y a los precios e ingreso finales.
- Encuentre las demandas Hicksianas por los bienes 1 y 2.
- Compruebe que la forma funcional de las demandas Marshallianas y las Hicksianas son las correctas.
- Estime la VC y la VE del consumidor para el cambio en el precio del bien 1 a partir de la demanda Hicksiana.
- Estime la VC y la VE del consumidor para el cambio en el precio del bien 1 usando la función de utilidad indirecta.

Problema Primal

$$\underset{q_1, q_2}{Max}\ q_1^{0.6} q_2^{0.4}\ sujeto\,a\, m = p_1 q_1 + p_2 q_2$$

El Lagrangeano de éste proceso de maximización es:

$$L = q_1^{0.6} q_2^{0.4} + \lambda\left[m - p_1 q_1 - p_2 q_2\right]$$

Las condiciones de primer orden son:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 0.6q_1^{-0.4}q_2^{0.4} - \lambda p_1 = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow 0.4q_1^{0.6}q_2^{-0.6} - \lambda p_2 = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow m - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$

Luego, (1) entre (2):

$$\frac{0.6q_1^{-0.4}q_2^{0.4}}{0.4q_1^{0.6}q_2^{-0.6}} = \frac{\lambda p_1}{\lambda p_2}$$
$$\frac{0.6q_2}{0.4q_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow q_2 = \frac{0.4p_1q_1}{0.6p_2} = \frac{0.66p_1q_1}{p2}$$

Luego, reemplazamos q_2 en (3):

$$m - p_1q_1 - p_2q_2 = 0$$
$$m - p_1q_1 - p_2\left(\frac{0.66p_1q_1}{p2}\right) = 0$$
$$m - p_1q_1 - 0.66p_1q_1 = 0$$
$$m - 1.66p_1q_1 = 0$$
$$m = 1.66p_1q_1$$
$$q_1 = \frac{m}{1.66p_1}$$

Luego, la demanda Marshalliana por el bien 1 es:

$$\tilde{q}_1(p_1, m) = \frac{0.6m}{p_1}$$

Ahora reemplazamos en q_2 para encontrar la demanda Marshalliana por el bien 2:

$$q_2 = \frac{0.66p_1q_1}{p2} = \frac{0.66p_1\left(\dfrac{0.6m}{p_1}\right)}{p2}$$

Luego, la demanda Marshalliana por el bien 2 es:

$$\tilde{q}_2(p_2, m) = \frac{0.4m}{p_2}$$

El cambio de excedente del consumidor derivado del cambio en el precio del bien 1es:

$$\Delta S = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \tilde{q}_1(p_1, m)dp_1$$

$$\Delta S = -\int_6^3 \left(\frac{0.6m}{p_1}\right) dp_1 = -0.6m \ln p_1 \Big|_6^3 = -0.6(50) \ln p_1 \Big|_6^3 = -30 \ln p_1 \Big|_6^3$$

$$\Delta S = -[30\ln(3) - 30\ln(6)] = -[(30)(1.09) - (30)(1.79)] = -[32.7 - 53.7]$$

$$\Delta S = \$\ 21$$

La ganancia aproximada del consumidor por la baja en el precio del bien 1 es de 21 pesos.

Ahora, para encontrar la función de utilidad indirecta, reemplazamos las demandas Marshallianas por los bienes 1 y 2 en la utilidad directa, entonces:

$$V(p_1, p_2, m) = U(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2) = \tilde{q}_1^{0.6} \tilde{q}_2^{0.4}$$

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{0.6m}{p_1}\right)^{0.6} \left(\frac{0.4m}{p_2}\right)^{0.4}$$

A partir de esta función, aplicando la Identidad de Roy podemos llegar de nuevo a las demandas Marshallianas por los bienes 1 y 2.

También, a partir de esta función podemos encontrar la utilidad inicial y la utilidad final reemplazando los precios e ingresos iniciales y finales, respectivamente:

En el caso de la utilidad inicial:

$$V(p_1^0, p_2^0, m^0) = \left(\frac{0.6(50)}{(6)}\right)^{0.6} \left(\frac{0.4(50)}{(1)}\right)^{0.4} = (5)^{0.6}(20)^{0.4} = (2.62)(3.31)$$

Luego, la utilidad inicial es igual a:

$$V(p_1^0, p_2^0, m^0) = 8.67\, utiles$$

Hacemos lo mismo para calcular la utilidad final:

$$V(p_1^1, p_2^1, m^1) = \left(\frac{0.6(50)}{(3)}\right)^{0.6} \left(\frac{0.4(50)}{(1)}\right)^{0.4} = (10)^{0.6}(20)^{0.4} = (3.98)(3.31)$$

Luego, la utilidad final es igual a:

$$V(p_1^1, p_2^1, m^1) = 13.2 \; utiles$$

Para encontrar las demandas Hicksianas por el bien 1 y por el bien 2 planteamos el proceso de minimización de gasto, conocido también con el nombre de problema dual:

$$\underset{q_1, q_2}{Min} \; p_1 q_1 + p_2 q_2 \; sujeto \, a \; U = q_1^{0.6} q_2^{0.4}$$

El Lagrangeano de éste proceso de minimización es:

$$L = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \mu\left[U - q_1^{0.6} q_2^{0.4}\right]$$

Las condiciones de primer orden son:

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow p_1 - \mu\left(0.6 q_1^{-0.4} q_2^{0.4}\right) = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow p_2 - \mu\left(0.4 q_1^{0.6} q_2^{-0.6}\right) = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow U(q_1, q_2) - q_1^{0.6} q_2^{0.4} = 0$

Luego, (1) entre (2):

$$\frac{\mu\left(0.6 q_1^{-0.4} q_2^{0.4}\right)}{\mu\left(0.4 q_1^{0.6} q_2^{-0.6}\right)} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{0.6 q_2}{0.4 q_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow q_2 = \frac{0.4 p_1 q_1}{0.6 p_2} = \frac{0.66 p_1 q_1}{p_2}$$

Reemplazamos q_2 en (3):

$$U - q_1^{0.6} q_2^{0.4} = 0$$

$$U - q_1^{0.6} \left(\frac{0.66 p_1 q_1}{p_2}\right)^{0.4} = 0$$

$$U - \frac{q_1^{0.6} \, 0.84 p_1^{0.4} q_1^{0.4}}{p_2^{0.4}} = 0 \Rightarrow 0.84 q_1 p_1^{0.4} = p_2^{0.4} U \Rightarrow q_1 = \frac{p_2^{0.4} U}{0.84 p_1^{0.4}}$$

Luego, la demanda Hicksiana por el bien 1 es:

$$\bar{q}_1(p_1, p_2, U) = \frac{1.2 p_2^{0.4} U}{p_1^{0.4}}$$

Reemplazamos en q_2 para obtener la demanda Hicksiana por el bien 2:

$$q_2 = \frac{0.66 p_1 q_1}{p_2} = \frac{0.66 p_1 \left(\frac{1.2 p_2^{0.4} U}{p_1^{0.4}} \right)}{p_2} = \frac{0.66 p_1^{0.6} (1.2 p_2^{0.4} U)}{p_2}$$

Luego, la demanda Hicksiana por el bien 2 es:

$$\bar{q}_2(p_1, p_2, U) = \frac{0.79 p_1^{0.6} U}{p_2^{0.6}}$$

Si reemplazamos las demandas Hicksianas por los bienes 1 y 2 en la función objetivo del problema dual, obtenemos la función de mínimo gasto:

$$e(p_1, p_2, U) = p_1 \bar{q}_1(p_1, p_2, U) + p_2 \bar{q}_2(p_1, p_2, U)$$
$$e(p_1, p_2, U) = p_1 \left(\frac{1.2 p_2^{0.4} U}{p_1^{0.4}} \right) + p_2 \left(\frac{0.79 p_1^{0.6} U}{p_2^{0.6}} \right)$$

$$e(p_1, p_2, U) = 1.2 p_1^{0.6} p_2^{0.4} U + 0.79 p_1^{0.6} p_2^{0.4} U$$

$$e(p_1, p_2, U) = 1.99 p_1^{0.6} p_2^{0.4} U$$

A partir de esta función, aplicando el Lema de Sheppard, podemos encontrar las demandas Hicksianas para el bien 1 y el bien 2.

Para comprobar si las formas funcionales de la demanda Marshalliana y la demanda Hicksiana por el bien 1 son correctas, reemplazamos los precios e ingreso inicial y final, la cantidades deben ser iguales. Es decir:

$$\tilde{q}_1(p_1^0, m^0) = \bar{q}_1(p_1^0, p_2^0, U^0)$$
$$\tilde{q}_1(p_1^1, m^1) = \bar{q}_1(p_1^1, p_2^1, U^1)$$

Para el Bien 1, usando la demanda Marshalliana en precios e ingreso inicial, tenemos:

$$\tilde{q}_1(p_1^0, m^0) = \frac{0.6 m^0}{p_1^0}$$
$$\tilde{q}_1(p_1^0, m^0) = \frac{0.6(50)}{6} = 5 \; unidades$$

Con la demanda Hicksiana:

$$\bar{q}_1(p_1^0, p_2^0, U^0) = \frac{1.2(p_2^0)^{0.4} U^0}{(p_1^0)^{0.4}}$$

$$\bar{q}_1(p_1^0, p_2^0, U^0) = \frac{1.2(1)^{0.4}(8.67)}{(6)^{0.4}} = 5 \textit{ unidades}$$

Por consiguiente, la forma funcional es correcta. Ahora veamos que pasa cuando reemplazamos precios e ingreso finales:

$$\tilde{q}_1(p_1^1, m^1) = \frac{0.6m^1}{p_1^1}$$

$$\tilde{q}_1(p_1^1, m^1) = \frac{0.6(50)}{(3)} = 10 \textit{ unidades}$$

Con la demanda Hicksiana:

$$\bar{q}_1(p_1^1, p_2^1, U^1) = \frac{1.2(p_2^1)^{0.4} U^1}{(p_1^1)^{0.4}}$$

$$\bar{q}_1(p_1^1, p_2^1, U^1) = \frac{1.2(1)^{0.4}(13.17)}{(3)^{0.4}} = 10 \textit{ unidades}$$

Note que para el precio y el ingreso final, la cantidad es 10 unidades, provenga éste dato de la demanda Marshalliana o de la demanda Hicksiana en el nivel de utilidad final. Para encontrar la cantidad de q_1 con el efecto ingreso, reemplazo en la demanda Hicksiana el precio final del bien 1, y el nivel de utilidad inicial. Es decir:

$$\bar{q}_1(p_1^1, p_2^1, U^0) = \frac{1.2(p_2^1)^{0.4} U^0}{(p_1^1)^{0.4}}$$

$$\bar{q}_1(p_1^1, p_2^1, U^0) = \frac{1.2(1)^{0.4}(8.67)}{(3)^{0.4}} = 6.7 \textit{ unidades}$$

Ahora la cantidad demandada del bien 1 cuando los precios son iniciales y el nivel de utilidad es el final, es:

$$\bar{q}_1(p_1^0, p_2^0, U^1) = \frac{1.2(p_2^0)^{0.4} U^1}{(p_1^0)^{0.4}}$$

$$\bar{q}_1(p_1^0, p_2^0, U^1) = \frac{1.2(1)^{0.4}(13.17)}{(6)^{0.4}} = 7.7 \textit{ unidades}$$

Ahora podemos estimar la VC y la VE para el cambio en el precio del bien 1 a partir de la función de demanda Hicksiana por éste bien.

$$VC = -\int_{p_1^0}^{p_1^1} \bar{q}_1(p_1, p_2, U^0)\,dp_1$$

$$VC=-\int_{6}^{3}\left(\frac{1.2p_2^{0.4}U^0}{p_1^{0.4}}\right)dp_1=-\int_{6}^{3}\left(\frac{1.2(1)^{0.4}(8.67)}{p_1^{0.4}}\right)dp_1=-\int_{6}^{3}\left(\frac{10.4}{p_1^{0.4}}\right)dp_1=-10.4\int_{6}^{3}p_1^{-0.4}dp_1$$

$$VC=-\frac{10.4p_1^{0.6}}{0.6}\Big|_6^3=-17.33p_1^{0.6}\Big|_6^3=-\left[\left(17.33(3)^{0.6}\right)-\left(17.33(6)^{0.6}\right)\right]=-[33.5-50.77]$$

$$VC=\$\,17.27\cong\$17$$

La ganancia exacta del consumidor por la baja en el precio del bien 1 es de 17 pesos. Es la máxima disponibilidad a pagar del consumidor por acceder a comprar q_1 al precio más bajo.

Ahora estimemos la VE para el mismo cambio de precio:

$$VE=-\int_{p_1^0}^{p_1^1}\bar{q}_1(p_1,p_2,U^1)dp_1$$

$$VE=-\int_{6}^{3}\left(\frac{1.2p_2^{0.4}U^1}{p_1^{0.4}}\right)dp_1=-\int_{6}^{3}\left(\frac{1.2(1)^{0.4}(13.17)}{p_1^{0.4}}\right)dp_1=-\int_{6}^{3}\left(\frac{15.8}{p_1^{0.4}}\right)dp_1=-15.8\int_{6}^{3}p_1^{-0.4}dp_1$$

$$VE=-\frac{15.8p_1^{0.6}}{0.6}\Big|_6^3=-26.3p_1^{0.6}\Big|_6^3=-\left[\left(26.3(3)^{0.6}\right)-\left(26.3(6)^{0.6}\right)\right]=-[50.8-77.1]$$

$$VE=\$\,26.22\cong\$\,26$$

La ganancia exacta del consumidor por la baja en el precio del bien 1 es de 26 pesos. Es la mínima disponibilidad a aceptar del consumidor por renunciar a comprar q_1 al precio más bajo.

Al final:

$$\text{VC}=\$\,17,\ \Delta\text{EC}=\$\,21,\ \text{VE}=\$\,26$$

Luego:

$$\text{VC}\leq\Delta\text{EC}\leq\text{VE}$$

Para una disminución en el precio: recuerde también que se puede utilizar la definición implícita de la VC y la VE para estimar directamente estas medidas a partir de la función de utilidad indirecta. Las definiciones son:

$$V(p_1^1,m^1-VC)=V(p_1^0,m^0)=U^0$$

Con el nuevo precio se le debe quitar ingreso al consumidor para dejar en el nivel de utilidad inicial, U^0. Para la VE:

$$V(p_1^0, m^0 + VE) = V(p_1^1, m^1) = U^1$$

Con el precio original se le debe dar ingreso al consumidor para dejarlo en el nivel de utilidad final como si se hubiese dado el cambio, U^1. Gráficamente los resultados de VC y VE para este ejercicio se presentan a continuación.

Para estimar la VC usando la definición necesitamos primero la función de utilidad indirecta:

$$V(p_1, p_2, m) = \left(\frac{0.6m}{p_1}\right)^{0.6}\left(\frac{0.4m}{p_2}\right)^{0.4}$$

A partir de esta función aplicamos la definición de VC:

$$\left(\frac{0.6(m^1 - VC)}{p_1^1}\right)^{0.6}\left(\frac{0.4(m^1 - VC)}{p_2^1}\right)^{0.4} = \left(\frac{0.6(m^0)}{p_1^0}\right)^{0.6}\left(\frac{0.4(m^0)}{p_2^0}\right)^{0.4}$$

$$\left(\frac{0.6^{0.6}(m^1 - VC)^{0.6}}{(p_1^1)^{0.6}}\right)\left(\frac{0.4^{0.4}(m^1 - VC)^{0.4}}{(p_2^1)^{0.4}}\right) = \left(\frac{0.6^{0.6}(m^0)^{0.6}}{(p_1^0)^{0.6}}\right)\left(\frac{0.4^{0.4}(m^0)^{0.4}}{(p_2^0)^{0.4}}\right)$$

$$\frac{0.51(m^1 - VC)}{(p_1^1)^{0.6}(p_2^1)^{0.4}} = \frac{0.51(m^0)}{(p_1^0)^{0.6}(p_2^0)^{0.4}} \Rightarrow \frac{0.51(50 - VC)}{(3)^{0.6}(1)^{0.4}} = \frac{0.51(50)}{(6)^{0.6}(1)^{0.4}} \Rightarrow$$

$$\frac{25.5 - 0.51VC}{(1.93)(1)} = \frac{25.5}{(2.93)(1)} \Rightarrow 25.5 - 0.51VC = \frac{(25.5)(1.93)}{2.93} \Rightarrow$$

$$0.51VC = 25.5 - \frac{(25.5)(1.93)}{2.93} \Rightarrow VC = \frac{25.5 - 16.79}{0.51}$$

$$VC = \$\,17.07 \cong 17$$

Luego, la variación compensatoria es 17 pesos, igual a la encontrada con la integral del área bajo la curva de demanda Hicksiana al nivel de utilidad inicial.

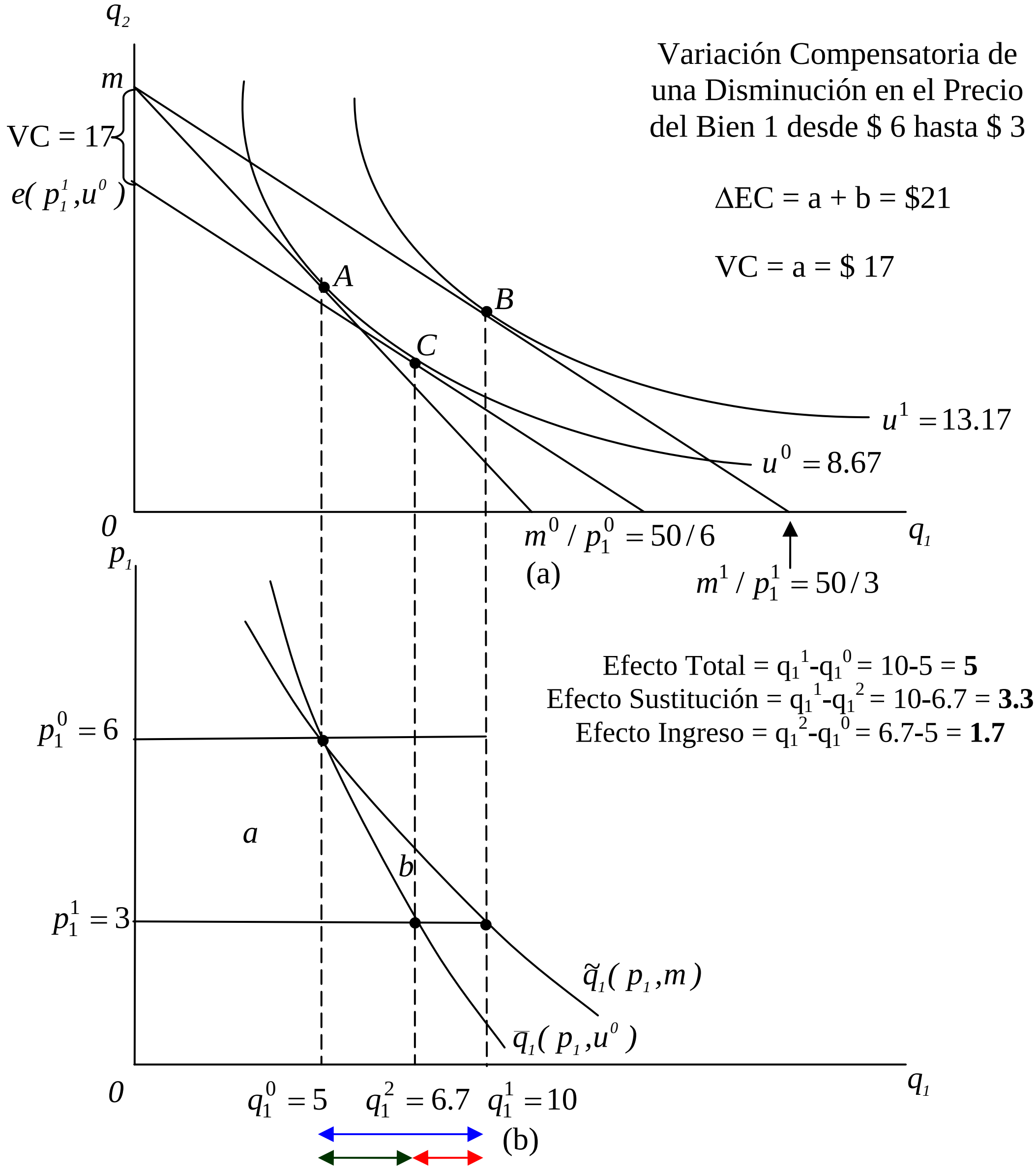


Figura 34: VC de un cambio en Precio.

Ahora para estimar la VE seguimos el mismo procedimiento:

$$\left(\frac{0.6(m^0+VE)}{p_1^0}\right)^{0.6}\left(\frac{0.4(m^0+VE)}{p_2^0}\right)^{0.4} = \left(\frac{0.6(m^1)}{p_1^1}\right)^{0.6}\left(\frac{0.4(m^1)}{p_2^1}\right)^{0.4}$$

$$\left(\frac{0.6^{0.6}(m^0+VE)^{0.6}}{(p_1^0)^{0.6}}\right)\left(\frac{0.4^{0.4}(m^0+VE)^{0.4}}{(p_2^0)^{0.4}}\right) = \left(\frac{0.6^{0.6}(m^1)^{0.6}}{(p_1^1)^{0.6}}\right)\left(\frac{0.4^{0.4}(m^1)^{0.4}}{(p_2^1)^{0.4}}\right)$$

$$\frac{0.51(m^0+VE)}{(p_1^0)^{0.6}(p_2^0)^{0.4}} = \frac{0.51(m^1)}{(p_1^1)^{0.6}(p_2^1)^{0.4}} \Rightarrow \frac{0.51(50+VE)}{(6)^{0.6}(1)^{0.4}} = \frac{0.51(50)}{(3)^{0.6}(1)^{0.4}} \Rightarrow$$

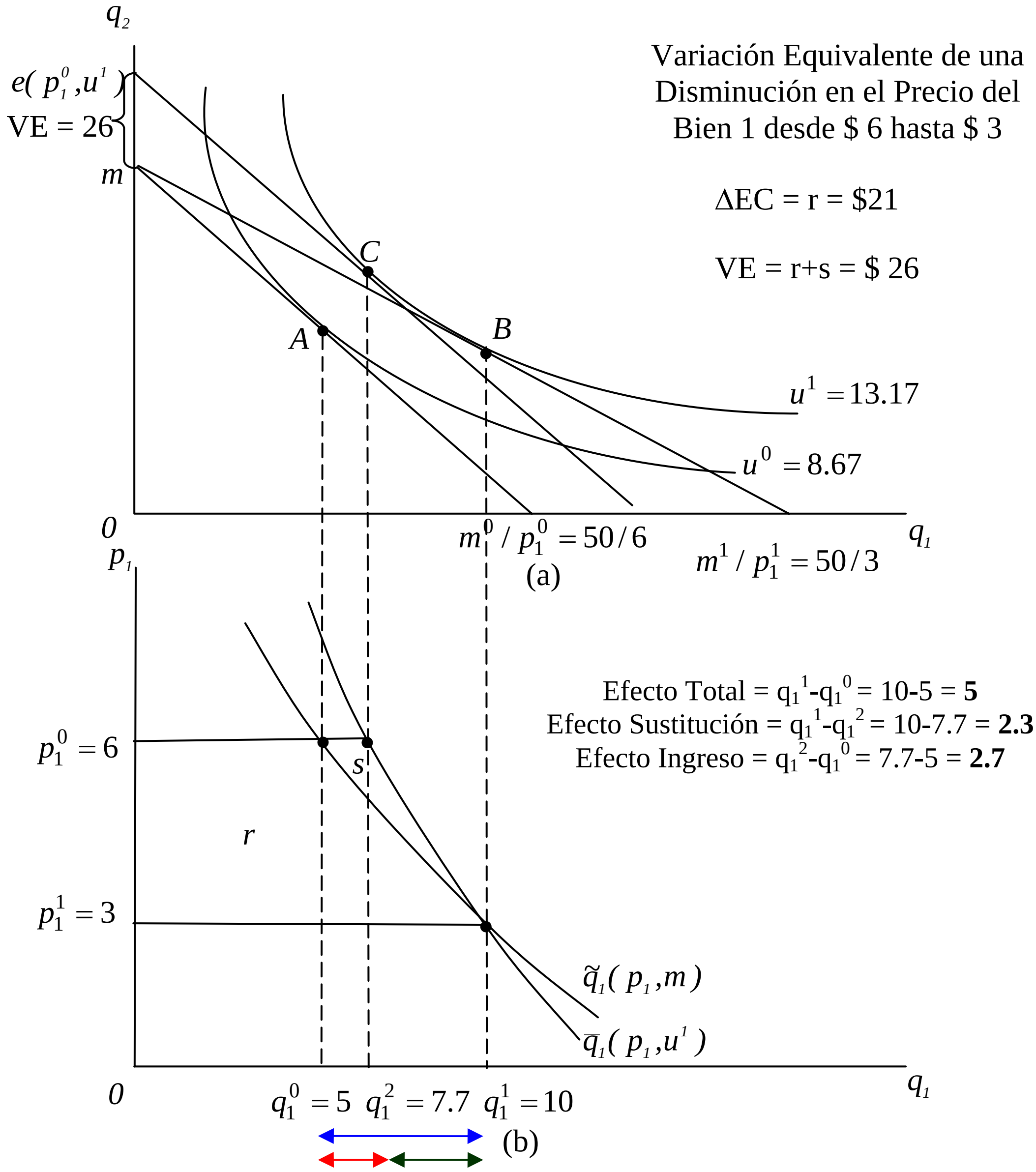


Figura 35: VE de un cambio en Precio.

$$\frac{25.5 + 0.51VE}{(2.93)(1)} = \frac{25.5}{(1.93)(1)} \Rightarrow 25.5 + 0.51VE = \frac{(25.5)(2.93)}{1.93} \Rightarrow$$

$$0.51VE = \frac{(25.5)(2.93)}{1.93} - 25.5 \Rightarrow VC = \frac{38.7 - 25.5}{0.51}$$

$$VE = \$\ 25.88 \cong 26$$

Luego, la variación equivalente es 26 pesos, igual a la encontrada con la integral del área bajo la curva de demanda Hicksiana al nivel de utilidad final.

Ejercicio 4: Estimación de la VC y VE a través de la definición implícita, definición explícita y con el método de integral de senda.

Suponga la siguiente función de utilidad indirecta:

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2}$$

Dado el siguiente cambio en precios e ingreso derivado de la ejecución de una política.

$$\left(p_1^0, p_2^0, m^0\right) = (1,1,2)$$
$$\left(p_1^1, p_2^1, m^1\right) = (1,2,1)$$

Primeramente, si reemplazamos los valores iniciales y finales de los precios y el ingreso obtenemos la utilidad inicial y final.

$$U^0 = V(p_1^0, p_2^0, m^0) = \frac{m^0}{p_1^0 + p_2^0} = \frac{(2)}{(1+1)} = 1$$
$$U^1 = V(p_1^1, p_2^1, m^1) = \frac{m^1}{p_1^1 + p_2^1} = \frac{(1)}{(1+3)} = \frac{1}{3}$$

Estimamos la VC y la VE usando la definición implícita, definición explícita y el método de la integral de senda. Partimos de la definición implícita para la VC:

$$V\left(p^1, m^1 - VC\right) = V\left(p^0, m^0\right) = U^0$$

Luego, aplicamos esta definición considerando la forma funcional de V(p, m), para el caso de dos precios y el ingreso:

$$\frac{m^0 - VC}{p_1^1 + p_2^1} = \frac{m^0}{p_1^0 + p_2^0} = U^0$$

Reemplazando los respectivos valores, tenemos:

$$\frac{1 - VC}{1 + 2} = \frac{2}{1+1} \Rightarrow 1 - VC = 3 \Rightarrow VC = -2$$

La VC para este cambio en precios es ingreso es una pérdida en bienestar equivalente a $ 2, esta se interpretación como una mínima disposición a aceptar del consumidor por comprar a los precios más caros y el ingreso disminuido.

Bajo la definición explícita la VC es igual a:

$$VC = m^1 - m^0 - \left[e\left(p^1, U^0\right) - e\left(p^0, U^0\right)\right]$$

Si sabemos que $V^{-1}(p,U) = e(p,U)$, luego:

$$V(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + p_2} \rightarrow e(p_1, p_2, U) = U[p_1 + p_2]$$

Entonces, la VC para este cambio en precios e ingreso por la definición explícita es igual a:

$$V(p^1, m^1 - VC) = V(p^0, m^0) = U^0$$
$$m^1 - VC = V^{-1}(p^1, U^0)$$
$$m^1 - VC = e(p^1, U^0)$$

Dividiendo y multiplicando por m^0, a ambos lados de la anterior expresión y despejando la VE, tenemos:

$$VC = m^1 - m^0 - [e(p^1, U^0) - e(p^0, U^0)]$$

$$VC = m^1 - m^0 - [U^0(p_1^1 + p_2^1) - U^0(p_1^0 + p_2^0)]$$

$$VC = 1 - 2 - [(1)(1+2) - (1)(1+1)]$$

$$VC = -1 - [3 - 2] = -1 - 1 = -2$$

La pérdida en bienestar del consumidor ante el cambio en precios e ingreso es de \$ 2 pesos, igual que en anterior caso (definición implícita). Ahora encontremos la VC por el Método de la Integral de Senda:

$$VC = \Delta m - \int_{p_1^0}^{p_1^1} \bar{q}_1(\bar{p}_1, p_2^0, U^0)dp_1 - \int_{p_2^0}^{p_2^1} \bar{q}_2(\bar{p}_2, p_1^1, U^0)dp_2$$
$$VC = (1-2) - \int_1^1 U^0 dp_1 - \int_1^2 U^0 dp_2$$
$$VC = -1 - [p_2]_1^2 \Rightarrow VC = -1 - (1) = -2$$

Note, que por las tres maneras de estimación, la VC para este cambio de precios e ingreso arroja el mismo valor. Ahora usando los mismos procedimientos de estimación dirijamos nuestro esfuerzo a estimar la VE.

La definición implícita para la VE es:

$$V(p^0, m^0 + VE) = V(p^1, m^1) = U^1$$

Luego:

$$\frac{m^0 + VE}{p_1^0 + p_2^0} = \frac{m^1}{p_1^1 + p_2^1} = U^1$$

Reemplazando los respectivos valores, tenemos:

$$\frac{2+VE}{1+1}=\frac{1}{1+2}\Rightarrow 2+VE=\frac{2}{3}\Rightarrow VE=-\frac{4}{3}$$

La VE para el cambio en precios e ingreso evaluado es una pérdida equivalente a 1.33 pesos. Esta sería la máxima disposición a pagar del individuo por evitar comprar a los precios más altos y el ingreso más bajo.

Bajo la otra forma de la definición explícita de la VE también es:

$$V\left(p^0,m^0+VE\right)=V\left(p^1,m^1\right)=U^1$$
$$m^0+VE=V^{-1}(\,p^0,U^1\,)$$
$$m^0+VE=e(\,p^0,U^1\,)$$

Dividiendo y multiplicando por m^1, a ambos lados de la anterior expresión y despejando la VE, tenemos:

$$VE=m^1-m^0-\left[e\left(p^1,U^1\right)-e\left(p^0,U^1\right)\right]$$

$$VE=m^1-m^0-\left[U^1\left(p_1^1+p_2^1\right)-U^1\left(p_1^0+p_2^0\right)\right]$$

$$VE=1-2-\left[\left(\frac{1}{3}\right)(1+2)-\left(\frac{1}{3}\right)(1+1)\right]$$

$$VE=-1-\left[1-\frac{2}{3}\right]=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}$$

Que es el mismo resultado encontrado para la VE a partir de usar la definición implícita, su interpretación sería la misma. Ahora, por último, encontramos la VE por el Método de la Integral de Senda:

$$VE=\Delta m-\int_{p_1^0}^{p_1^1} q_1(\,p_1,p_2^0,U^1\,)dp_1-\int_{p_2^0}^{p_2^1} q_2(\,p_2,p_1^1,U^1\,)dp_2$$
$$VE=(1-2)-\int_1^1 U^1 dp_1-\int_1^2 U^1 dp_2$$
$$VE=-1-\frac{1}{3}\left[p_2\right]_1^2\Rightarrow VE=-1-\frac{1}{3}(1)=-\frac{4}{3}\,y\,U^1=\frac{1}{3}$$

Concluimos que bajo los tres métodos se encontró que la VE para este cambio en precios e ingreso derivado de una política es -4/3 pesos.

Metodologías de Medición Empírica del Bienestar del Consumidor

Una vez finalizado el estudio de la teoría de medición del bienestar del consumidor bajo a iniciar con una nueva etapa en el estudio del bienestar aplicado del consumidor relacionado con el conjunto de metodologías disponibles para medir los impactos sobre el bienestar de los consumidores derivados de la ejecución de políticas que cambian los precios y el ingreso de los consumidores.

Estas metodologías al igual que en el caso de los criterios de evaluación de políticas fueron propuestas una a una por diferentes economistas interesados en la medición del bienestar del consumidor. Y la siguiente metodología propuesta trata de vencer las limitaciones de la metodología anterior con la finalidad de refinar todo el instrumental disponible para la medición del bienestar.

El punto más importante a destacar es que después del artículo de Samuelson sobre la constancia de la utilidad marginal del ingreso, el excedente del consumidor pierde validez como medida de bienestar del consumidor. Desde 1954 hasta antes de 1976 el excedente del consumidor siguió utilizándose como herramienta de medición de los beneficios y costos derivados de políticas y proyectos públicos. Durante todo este tiempo el excedente del consumidor se utilizó con disculpas debido a que a partir del resultado encontrado por Samuelson, el excedente no era una buena herramienta que nos permitiera aproximarnos a una medición del cambio en utilidad de los consumidores impactados por las políticas y proyectos.

En 1976 Ronald Willig en la revista American Economic Review publica el artículo "*Consumer´s Surplus without Apology*" en donde propone una metodología para estimar la VC o la VE a partir del ΔS. Este esfuerzo es el primer esfuerzo de varios encaminados a rescatar el ΔS como una medida de bienestar válida para medir el bienestar del consumidor. Luego, en 1981 Jerry Hausman en la revista American Economic Review publica el artículo "*Exact Consumer´s Surplus and Deadweigth loss*" trabajando a partir de la idea inicial de John Haus quien en 1975 en la revista Journal of Political Economy publica el artículo "*The Theory of Welfare Cost Measurement*". La idea principal de Hause es que podemos a obtener información sobre la demanda compensada a partir de los parámetros estimados de la función de demanda no compensada. Esta información es considerada por Hausman quien crítica el trabajo de Willig en el sentido de que en presencia de distorsiones la medición propuesta por Willig no puede ser fructifera. Es así como Hausman utilizando la identidad de Roy relaciona la función de demanda Marshalliana (no compensada) con la función de utilidad indirecta, y llega a derivar parámetros para la última función que luego permite aplicar la definición explícita de la VC o VE para estimar el cambio en bienestar.

Ante la limitante del enfoque de medición de Hausman, el cual es muy restrictivo en cuanto a la forma funcional de la demanda no compensada, la cual necesita una solución en términos de una ecuación diferencial, el ecomista Yrjo Vartia en (1983) publica en la revista Econometrica el artículo "*Efficiente Methods of Measuring*

Welfare Change and Compensated Income interés of Ordinary Demand Functions". El pensamiento de Vartia en este artículo gira en torno a que el error de medición de la VC a partir del ΔS puede ser eliminado con un algoritmo. Este algoritmo estimaría una VC a partir de datos de la demanda no compensada, obteniendo el valor de la VC o de la VE cuando el algoritmo converge.

El último esfuerzo llamado Dualidad parte de la estimación de un sistema de demandas no compensadas legítimo que proviene de funciones de utilidad indirecta o de mínimo gasto legítimas. Para que las estimaciones de la VC o de la VE a partir de los parámetros de estas funciones estimadas econométricamente tengan una interpretación económica, el sistema de demanda con el que se esté trabajando deberá cumplir con un conjunto de condiciones llamadas condiciones de integrabilidad. Todas y cada una de estas metodologías serán estudiadas a continuación.

Metodología de Willig "Límites de Willig"

Como se mencionó anteriormente, este es el primer esfuerzo encaminado a rescatar al excedente del consumidor como una medida del bienestar del consumidor útil para evaluar los cambios en bienestar que generan las políticas y proyectos públicos. Esta metodología nos dice que si el error en la estimación de la Variación Compensatoria (VC) o de la Variación Equivalente (VE) a partir del cambio en el excedente (ΔS) no supera el 5%, se estima una medida de la VC o de la VE que es una buena aproximación de la verdadera a partir de utilizar el ΔS. Los errores exactos por la metodología son:

Los errores exactos para la VC y la VE se miden a partir de las siguientes formulas:

$$\varepsilon_{VC}^{k} = \frac{\left[1 + S(\eta^{k} - 1)\right]^{1/1-\eta^{k}} - 1 + S}{|S|}$$

Para todo k = 0 (estado inicial), 1 (estado final).

$$\varepsilon_{VE}^{k} = \frac{\left[1 - S(\eta^{k} - 1)\right]^{1/1-\eta^{k}} - 1 - S}{|S|}$$

Para todo k = 0 (estado inicial), 1 (estado final). Posteriormente, derivaremos las formulas aproximadas (regla de dedo) para derivar estos errores.

Esta metodología parte de entender la relación existente entre la demanda Hicksiana y la demanda Marshalliana. De la teoría microeconómica sabemos que ante un cambio en precios el efecto total compuesto por el efecto sustitución y el efecto ingreso se pueden cuantificar bajo la curva de demanda Marshalliana y el efecto sustitución sobre la demanda Hicksiana. Veamos esto en la siguiente figura:

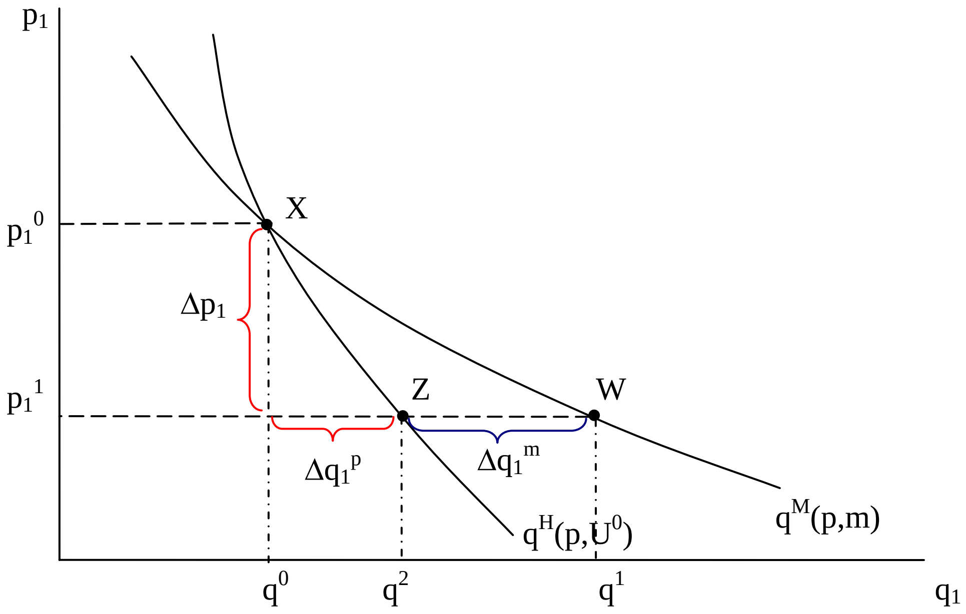


Figura 36: Cambio en la Cantidad del Bien 1 bajo el Efecto Sustitución y el Efecto Ingreso.

Note que el Δq_1^p es el cambio en la cantidad del bien 1 derivado del cambio en el precio conocido con el nombre de efecto sustitución. Este se mide bajo la curva de demanda Hicksiana. También observe que Δq_1^m es el cambio en la cantidad del bien 1 derivado del cambio en el precio y es conocido con el nombre de nombre de efecto ingreso. Como se muestra en la figura el cambio en el excedente del consumidor sobrestima la Variación Compensatoria por el área (XZW). Esta área se genera debido a que el efecto ingreso es diferente de cero ($\partial q/\partial m \neq 0$), luego, para que la VC y el ΔS sean iguales necesitaríamos que el efecto ingreso fuera igual a cero.

Del capitulo de medición del bienestar del consumidor a través del método de la integral de senda sabemos que el supuesto de efecto ingreso igual a cero es bastante restrictivo. Entonces, lo único que podemos concluir es que si la elasticidad ingreso de la demanda es cercana o igual a cero (tiende a ser inelástica), el área (XZW) sería bastante pequeña (despreciable) y la estimación de la VC o de la VE a partir del ΔS reportaría una medida aproximada, pero aceptable en términos de medición. Esta es la idea del profesor Willig y es conocida con el nombre de los límites de Willig (1976).

Después de explicar la intuición de este resultado pasaremos a la derivación de la medida. Primero tengamos en cuenta a partir de lo presentado en la siguiente figura que b es un área y que el error de medición definido como un porcentaje se podría representar como:

$$\frac{\Delta S - VC}{|\Delta S|} = \frac{(a+b)-a}{|a+b|} = \frac{b}{|a+b|}$$

En la siguiente figura se nota que el área que genera el error en la medición de la VC existe por que la derivada de q con respecto a m es diferente de cero.

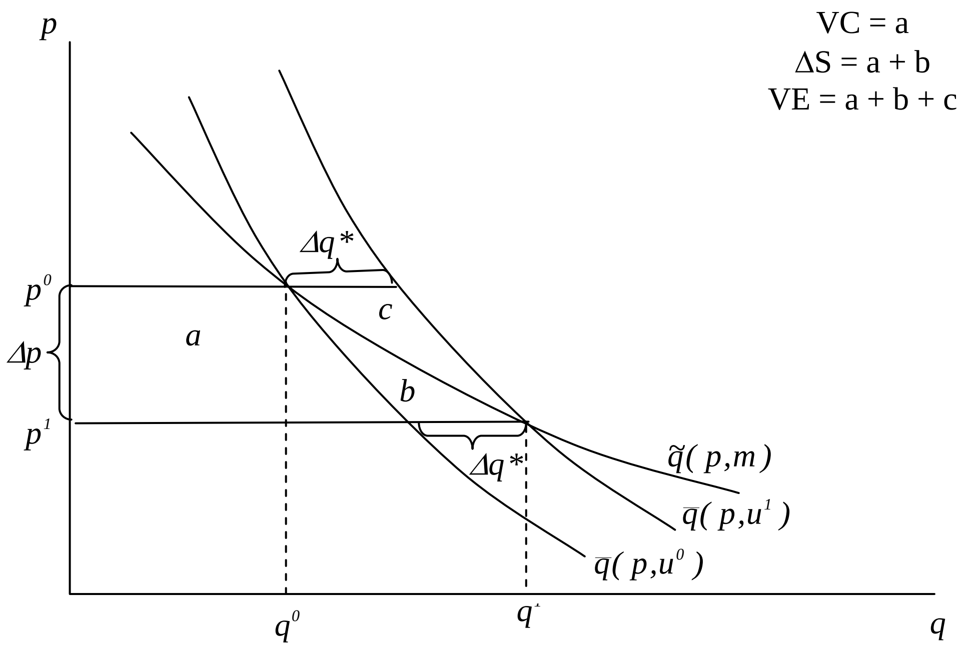


Figura 37: Error de Medición a partir con la Metodología de Willig

Luego, como se dijo anteriormente, para saber la magnitud del error necesitamos conocer la elasticidad ingreso de la demanda.

$$\eta^k = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}\frac{m}{\tilde{q}_i}$$

Para todo k = 0 (estado inicial), 1 (estado final). Tanto para el estado inicial como el final tendremos elasticidades ingreso que estarán directamente relacionadas con el estatus quo y con la situación con cambio. Es decir:

$$\eta^0 = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}\frac{m^0}{\tilde{q}_i^0} \text{ y } \eta^1 = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}\frac{m^1}{\tilde{q}_i^1}$$

El término $\overline{\eta}$ representará la elasticidad ingreso de la demanda promedio (el promedio entre la elasticidad inicial y final). Note, que de la elasticidad ingreso de la demanda podemos derivar una expresión para el cambio en la cantidad de q derivado por un cambio en el ingreso. Para ver esto, expresemos la elasticidad ingreso de la demanda en términos discretos:

$$\eta^k = \frac{\Delta \tilde{q}_i}{\Delta m}\frac{m}{\tilde{q}_i} \rightarrow \Delta \tilde{q}_i = \frac{\eta \Delta m q}{m}$$

Este cambio representa la diferencia entre q^1 y q^2, presentado en la figura 36. Para seguir con el desarrollo de los límites de Willig tengamos en cuenta dos definiciones del cambio en el excedente: (1) el cambio en el excedente del consumidor es aproximadamente igual a un cambio en el ingreso real [Δm ≈ ΔS], (2) el cambio en el excedente del consumidor es aproximadamente igual al cambio en el precio multiplicado por la cantidad inicial de consumo [$\Delta pq \approx \Delta S$]. Teniendo en cuenta la primera interpretación, el cambio en la cantidad derivado de un cambio en el ingreso se puede rescribir como:

$$\Delta\tilde{q}_i = \frac{\eta \Delta m q}{m} \rightarrow \Delta\tilde{q}_i = \frac{\eta \Delta S q}{m}$$

Ahora, tenemos que representar el área b, para aproximarnos a la estimación de la magnitud, para eso suponemos que una estimación aproximada del área b es igual a:

$$b = \frac{\Delta p \Delta\tilde{q}_i}{2}$$

Luego, reemplazamos en esta expresión la expresión para el cambio en la cantidad derivado de un cambio en el ingreso, obteniendo:

$$b = \frac{\Delta p \Delta\tilde{q}_i}{2} \rightarrow b = \frac{\Delta p\left(\frac{\eta \Delta S q}{m}\right)}{2}$$

Teniendo en cuenta la segunda definición de cambio en el excedente del consumidor:

$$b = \frac{\Delta S^2 \eta}{2m}$$

Si tenemos en cuenta que $\Delta S/m$, representa el porcentaje de cambio en el excedente del consumidor con respecto al ingreso inicial del individuo, la anterior expresión se puede rescribir como:

$$b = \frac{|\Delta S| s \eta}{2}$$

Donde, el ΔS esta en valor absoluto debido a que estamos representando el área b en porcentaje. Si sustituimos b en la expresión encontrada para representar el error como un porcentaje llegamos a:

$$\frac{\Delta S - VC}{|\Delta S|} = \frac{b}{|a+b|} = \frac{\frac{|\Delta S| s \eta}{2}}{|\Delta S|} = \frac{s\eta}{2}$$

Es decir, el error de aproximación en el cálculo de la VC o de la VE a partir del ΔS es:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{s\eta}{2}$$

Ahora, veamos cual sería el máximo valor de “s” para obtener el máximo error permisible. Si la elasticidad ingreso de la demanda es igual a 1, para que el error sea del 5 % necesitamos que el cambio en el excedente del consumidor con respecto al ingreso inicial sea igual a 10%:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{s\eta}{2} = \frac{(10)(1)}{2} = 5\%$$

La estimación exacta de los errores como aparece en el libro de los profesores Just, Hueth y Schmitz (2004) es:

$$\varepsilon_{VC}^{k} = \frac{\left[1 + S(\eta^{k} - 1)\right]^{1/1-\eta^{k}} - 1 + S}{|S|}$$

Para el caso de la VC, para todo k = 0, 1. Y:

$$\varepsilon_{VE}^{k} = \frac{\left[1 - S(\eta^{k} - 1)\right]^{1/1-\eta^{k}} - 1 - S}{|S|}$$

Para el caso de la VE, para todo k = 0, 1. Una vez que hemos derivado la expresión para el error, el siguiente paso es estimar el cambio en bienestar (VC o VE), a partir del ΔS. La formula para la estimación sería:

$$VC = VE = \Delta S \pm \frac{\overline{\eta}|\Delta S||S|}{2}$$

Con $\overline{\eta}$ que representa la elasticidad ingreso de la demanda promedio equivalente al promedio entre las elasticidades ingreso inicial (sin cambio de precio) y final (con cambio de precio), $\overline{\eta} = (\eta^{0} + \eta^{1})/2$. Donde, ΔS es el cambio en el excedente del consumidor que se estimar a partir de la integral:

$$\Delta S = -\int_{p_i^0}^{p_i^1} \tilde{q}(p_i, m)\,dp_i$$

Dependiendo si es una baja o una subida en el precio. En la figura 38 se presenta la VC y los posibles cambios en bienestar originados para un cambio en el precio medidos en términos de la VC y de la VE.

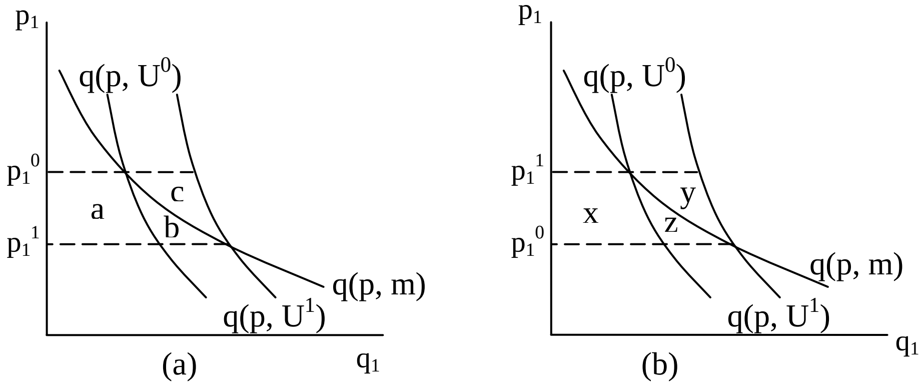


Figura 38: Estimación de la VC y la VE con el Enfoque de Willig.

En la siguiente tabla se presenta la manera de calcular la VC y la VE para una baja y una subida en el precio del bien 1.

Tabla 10: Estimación de la VC y la VE con la Metodología del Willig.

Cambio de Precio	VC	VE
Descendente ($p_1^0 > p_1^1$)	$VC = \Delta S - \frac{\eta \lvert\Delta S\rvert\lvert S\rvert}{2}$	$VE = \Delta S + \frac{\eta \lvert\Delta S\rvert\lvert S\rvert}{2}$
Ascendente ($p_1^0 < p_1^1$)	$VC = \Delta S + \frac{\eta \lvert\Delta S\rvert\lvert S\rvert}{2}$	$VE = \Delta S - \frac{\eta \lvert\Delta S\rvert\lvert S\rvert}{2}$

La metodología de Willig sirve para evaluar el cambio en bienestar del consumidor derivado del cambio en un precio (no sirve para evaluar múltiples cambios en precios). Como los límites del error dependen directamente de la elasticidad ingreso de la demanda, en el caso de bienes con elasticidad ingreso de la demanda elástica, la metodología muy probablemente no se podrá aplicar debido a que se sobre pasa el límite del error del 5%.

Esta metodología al ser una aproximación es menos preferida cuando se compara con las metodologías de Hausman y de Vartia, que si son metodologías que proponen una medición exacta.

Sin embargo, una ventaja importante de esta metodología radica en el hecho de que podemos utilizar estudios secundarios (evitando los problemas de restricciones de información primaria). Obviamente, los estudios de donde se tome la información sobre los parámetros de la función de demanda y elasticidad ingreso deben tener un nivel de calidad aceptable. La siguiente metodología a estudiar es la del profesor Hausman.

Metodología de Hausman "Medición Exacta de Hausman".

Esta metodología propone la medición exacta de la VC o de la VE usando las definiciones implícitas de VC y VE, una vez se estiman los parámetros de la función de utilidad indirecta o la función de gasto. Esta metodología supone que podemos derivar información sobre la demanda Hicksiana a partir de la demanda Marshalliana y que mediante el uso de las identidades de Mcfadden podemos sustituir m = e(p,U) en la demanda ordinaria, para poder obtener una estimación directa de la disposición a pagar como una medida de la VC o de la VE, que solo se podría obtener a través de la demanda Hicksiana.

Aplicando las identidades tenemos:

$$\bar{q}_j(\mathbf{p},U) = \tilde{q}_j(\mathbf{p},m)$$

Si m = e(p, U). Luego:

$$\tilde{q}_j(\mathbf{p},e(p,U))$$

Y podemos derivar con respecto a p_j. Si en el óptimo:

$$\bar{q}_j(\mathbf{p},U) = \tilde{q}_j(\mathbf{p},e(p,U))$$
$$\frac{\partial e(\mathbf{p},U)}{\partial p_j} = \tilde{q}_j(\mathbf{p},e(p,U))$$

Podemos encontrar una solución para la función de mínimo gasto dependiente del precio, manteniendo el nivel de utilidad constante, U.

La metodología de Hausman utiliza la identidad de Roy y la definición explícita de la *VC* o de la *VE*. Se parte de la función de utilidad indirecta:

$$V(p,m)$$

Las medidas de bienestar expresadas en términos de la función de utilidad indirecta son:

$$V(p^1,m^1 - VC) = V(p^0,m^0) = U^0$$
$$V(p^1,m^1) = V(p^0,m^0 + VE) = U^1$$

Se calcula la diferencial total de la función de utilidad indirecta:

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial p}dp + \frac{\partial V(p,m)}{\partial m}dm = 0$$

$$\frac{\partial V(p,m)}{\partial m}dm = -\frac{\partial V(p,m)}{\partial p}dp$$

$$\frac{dm}{dp} = -\frac{\dfrac{\partial V(p,m)}{\partial p}}{\dfrac{\partial V(p,m)}{\partial m}}$$

$$\frac{dm}{dp} = -\tilde{q}(p,m)$$

Luego, se integra indefinidamente y se iguala la constante de integración $C = U^0$ = V(p,m) y se aplica la definición implícita de la *VC* o de la *VE*. Para verificar como funciona la metodología supongamos una política que genera el siguiente cambio en precios e ingreso (p^0, m^0) hasta (p^1, m^1). Donde, los precios iniciales y el ingreso inicial definen el nivel de utilidad inicial y los precios finales y el ingreso final determinan el nivel de utilidad final.

Y queremos estudiar la VC o la VE aplicando la definición implícita, una vez estimados los parámetros de la función de utilidad indirecta. En este caso partir de:

$$\bar{q}_i = \alpha p_i + \beta m + \gamma = \tilde{q}_i(p,m)$$

Con m = e(p, U). Partiendo de V(p, m) y usando la Identidad de Roy, tenemos:

$$\frac{dm}{dp} = \alpha p_i + \beta m + \gamma$$

La solución a esta ecuación diferencia de primer orden es[2]:

$$m(p_i) = ke^{\beta p_i} - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)$$

Con k = constante que puede ser U, entonces:

$$m(p_i) = Ue^{\beta p_i} - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)$$

Su U^0 = V(p,m), entonces:

$$V(p_i, m) = \left[m(p_i) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]e^{-\beta p_i}$$

Y luego aplicamos la definición implícita para encontrar la VC y la VE. Primero, encuentro la VC:

$$\left[(m^1 - VC) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]e^{-\beta p_i^1} = \left[(m^0) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]e^{-\beta p_i^0}$$

$$m^1 e^{-\beta p_i^1} - VCe^{-\beta p_i^1} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^1} = m^0 e^{-\beta p_i^0} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^0}$$

---

[2] Para verificar que $m(p_i)$ es la solución de la ecuación diferencial, tenemos:

$$\frac{dm(p_i)}{dp_i} = \beta Ue^{\beta p_i} - \frac{\alpha}{\beta} = \alpha p_i + \beta m(p_i) + \gamma$$

$$VCe^{-\beta p_i^1} = m^1 e^{-\beta p_i^1} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^1} - m^0 e^{-\beta p_i^0} - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^0}$$

Divido a ambos lados por $e^{-\beta p_i^1}$ y obtengo:

$$VC = m^1 + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right) - m^0 e^{-\beta p_i^0} e^{\beta p_i^1} - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^0} e^{\beta p_i^1}$$

$$VC = m^1 + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right) - m^0 e^{-\beta(p_i^1 - p_i^0)} - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta(p_i^1 - p_i^0)}$$

$$VC = m^1 + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right) - e^{-\beta(p_i^1 - p_i^0)}\left[m^0 + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]$$

Luego, solo reemplazamos los valores iniciales y finales del precio y del ingreso y los parámetros obtenidos de estimar una regresión para la demanda no compensada y obtenemos el valor de la VC. Un procedimiento parecido utilizaríamos para estimar la VE. Su $U^0 = V(p,m)$, entonces:

$$V(p_i, m) = \left[m(p_i) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]e^{-\beta p_i}$$

Y luego aplicamos la definición implícita para encontrar la VE.

$$\left[(m^0 + VE) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]e^{-\beta p_i^0} = \left[(m^1) + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right]e^{-\beta p_i^1}$$

$$m^0 e^{-\beta p_i^0} + VEe^{-\beta p_i^0} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^0} = m^1 e^{-\beta p_i^1} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^1}$$

$$VEe^{-\beta p_i^0} = m^1 e^{-\beta p_i^1} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^1} - m^0 e^{-\beta p_i^0} - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^0}$$

Divido a ambos lados por $e^{-\beta p_i^0}$ y obtengo:

$$VE = m^1 e^{-\beta p_i^1} e^{\beta p_i^0} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta p_i^1} e^{\beta p_i^0} - m^0 - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)$$

$$VE = m^1 e^{-\beta(p_i^1 - p_i^0)} + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)e^{-\beta(p_i^1 - p_i^0)} - m^0 - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)$$

$$VE = e^{-\beta(p_i^1 - p_i^0)}\left[m^1 + \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^1 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)\right] - m^0 - \frac{1}{\beta}\left(\alpha p_i^0 + \frac{\alpha}{\beta} + \gamma\right)$$

Suponga ahora una función de demanda no compensada tipo Cobb Douglas:

$$\tilde{q}_i(p_i, m) = \Gamma p_i^{\alpha} m^{\beta}$$

El lector puede encontrar la solución para esta ecuación, luego, encontrar la función de utilidad indirecta y aplicar la definición implícita para estimar la VC y la VE ó estimar la función de mínimo gasto para luego encontrar la VC y la VE a través de la definición explícita.

La ventaja principal de la metodología de Hausman es que ya no dependemos de un error de medición para ver si aplicamos o no la metodología, como en el caso de la metodología de Willig. En este caso ahora obtenemos una estimación exacta de la VC o de la VE, sin embargo, ahora el inconveniente es que las funciones de demanda compensadas que utilicemos deben tener una forma funcional específica. Esto es un problema de restricción de la forma funcional de la demanda que tiene consecuencias sobre la aplicabilidad de la metodología.

Si tratamos de hacer estimaciones recurriendo a otras formas funcionales puede que lleguemos a tener una ecuación diferencial que no podamos resolver, esto sería claramente una limitante de la metodología. No obstante, aún cuando se enfrentan estos problemas con la metodología de Hausman, esta sienta las bases para la medición del bienestar del consumidor bajo el enfoque de Dualidad, que utiliza formas funcionales más flexibles. Este enfoque lo estudiaremos al final de este capítulo.

Metodología de Vartia "Algoritmo de Vartia"

El profesor Vartia propone un algoritmo a partir del cual se trata de estimar la demanda Hicksiana bajo el nivel de utilidad inicial (para estimar la *VC*) a partir de pequeños cambios en precios e ingreso evaluados sobre la curva de demanda Marshalliana. Para entender esto primer podríamos pensar en que la VC se podría estimar a partir de especificar varios cambios de precios que permitan ir descomponiendo en tramos la demanda compensada como se presenta en la figura 39.

Note en esta figura que la demanda compensada se descompone en varias demandas definidas a partir de los cambios en precios. No como para el primer cambio de precio la VC equivale al área (a_0), luego para el segundo cambio de precio la VC equivale al área (b_0+b_1) y para el tercer cambio en precio la VC equivale al área (c_0+c_1+c_2). Al final, la VC es la suma total de estas áreas (a_0+b_0+b_1+c_0+c_1+c_2). Si la estimación de la VC se quiere hacer a partir de la demanda no compensada (que es la demanda observable), luego, el error correspondería al área (a_1+b_2+c_3), como ocurría en el caso de Willig. Antes esto se puede pensar entonces en invertir el análisis y ahora contar con una sola demanda compensada y empezar a generar varias demandas no compensadas definidas por los cambios en precio e ingreso, esto se presenta en la figura 40. Este es el enfoque de medición exacta propuesto por Vartia.

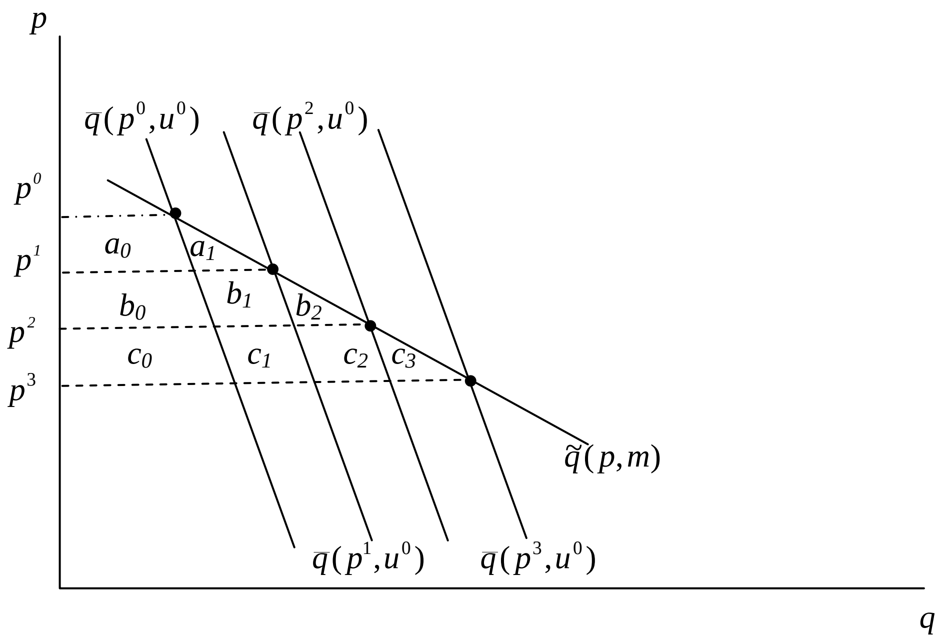


Figura 39: Estimación de la VC tomando como referencia la demanda compensada

Como se puede observar en la figura 40, ahora la demanda no compensada es descompuesta en varias demandas dependiendo del cambio en precio e ingreso. El área ($a_1+b_1+c_1$) es el error de medición de la VC a partir de la demanda no compensada que debería minimizarse a medida que se asignen mas cambios de precio. Esta es la idea del profesor Vartia.

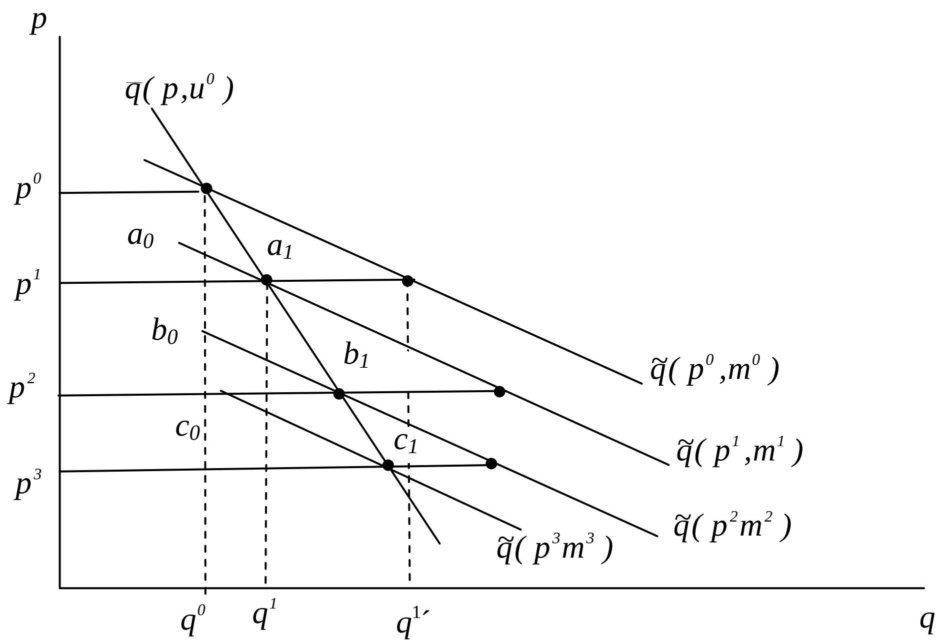


Figura 40: Estimación de la VC tomando como referencia la demanda no compensada

Para minimizar las áreas que representan el error de mediciones Vartia propone un algoritmo con k iteraciones equivalentes a los cambios en el precio. En el caso de la figura 40 se muestran tres cambios de precios, es decir, k = 3.

La aproximación de la *VC* a partir de la curva de demanda Marshalliana se estima como:

$$VC = \hat{m}^k - \hat{m}^0$$

Donde, $\hat{m}^k$ es el ingreso obtenido en la k iteración. Y la formula del algoritmo se representa como:

$$\hat{m}^k = \hat{m}^{k-1} + \left\{\left[\hat{q}(\hat{p}^k, \hat{m}^{k-1})\right] + \left[\hat{q}(\hat{p}^{k-1}, \hat{m}^{k-1})\right]\right\} \frac{\left[\hat{p}^k - \hat{p}^{k-1}\right]}{2}$$

Para todo k = 1, …., K. El valor de la VC se obtiene cuando el algoritmo converge en la k – esima iteración. Para los tres cambios de precios mostrados en la figura cuarenta, tendríamos:

$$\hat{m}^1 = \hat{m}^0 + \left\{\left[\hat{q}(\hat{p}^1, \hat{m}^0)\right] + \left[\hat{q}(\hat{p}^0, \hat{m}^0)\right]\right\} \frac{\left[\hat{p}^1 - \hat{p}^0\right]}{2}$$
$$\hat{m}^2 = \hat{m}^1 + \left\{\left[\hat{q}(\hat{p}^2, \hat{m}^1)\right] + \left[\hat{q}(\hat{p}^1, \hat{m}^1)\right]\right\} \frac{\left[\hat{p}^2 - \hat{p}^1\right]}{2}$$
$$\hat{m}^3 = \hat{m}^3 + \left\{\left[\hat{q}(\hat{p}^3, \hat{m}^2)\right] + \left[\hat{q}(\hat{p}^2, \hat{m}^2)\right]\right\} \frac{\left[\hat{p}^3 - \hat{p}^2\right]}{2}$$

Luego, la VC se estima como:

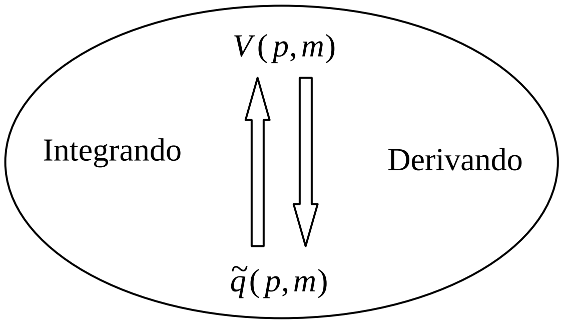
$$VC = \hat{m}^3 - \hat{m}^0$$

Si bien la metodología de Vartia y la metodología de Hausman proponen mediciones exactas, no aproximaciones como en el caso de la metodología de Willig. La metodología de Vartia se destaca sobre la metodología de Hausman en el sentido de que la primera no tiene restricciones sobre la forma funcional de la demanda no compensada que se utilice para la estimación. Esta metodología para cambios múltiples de precios no corre el riesgo de no encontrar una solución como pasaba con la metodología de Hausman. No obstante, se tiene la limitante de que si el criterio de convergencia del algoritmo es bastante restrictivo, no de lugar, a obtener una solución.

En vista de lo anterior, se mira el siguiente enfoque de medición del bienestar del consumidor conocido con el nombre de "Dualidad".

El Enfoque de Integrabilidad "Dualidad"

Este enfoque propone que si para llegar a las funciones de demanda no compensada y compensada a partir de la función de utilidad indirecta o de la función de mínimo gasto, se derivaba (identidad de Roy y lema de Sheppard). Ahora lo que se hace, una vez estimados los parámetros de la función de demanda no compensada, es integrar el sistema de demandas estimado con datos observables para obtener los parámetros de la función de utilidad indirecta o de la función de gasto bajo una forma funcional específica. Una vez realizado esto se pasaría al proceso de estimación de la *VC* y la *VE* a partir de la definición explícita o de la definición implícita. Es decir, en el caso de la función de utilidad indirecta estamos hablando de:



Para que la estimación de la VC o de la VE obtenida tenga un significado económico se debe garantizar que la función principal de la que se deriva el sistema de demandas sea una función legítima.

Bajo este enfoque se entiende que una función legítima es aquella que cumple con las condiciones de integrabilidad. Estas condiciones de integrabilidad se prueban sobre el sistema de ecuaciones de demandas con el que se esté trabajando. Las condiciones de integrabilidad son: (1) se cumpla con la restricción de presupuesto, (2) las funciones de demandas sean homogéneas de grado cero, (3) se cumpla la condición de simetría de Slutsky, (4) la matriz de Slutsky sea semidefinida negativa.

Un sistema de demandas ordinarias es integrable si se cumplen las condiciones de integrabilidad (Just, Hueth, Schmitz; 2004).

(1) La restricción de presupuesto se cumple.

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p},\mathrm{m})=\mathrm{m}$$

(2) Las demandas Marshallianas son homogéneas de grado cero en los precios y en el ingreso.

$$\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{p},\mathrm{m})=\tilde{\mathbf{q}}(\mathrm{t}\mathbf{p},\mathrm{tm})$$

(3) Se cumple la condición de simetría de Slutsky.

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial p_j}=\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial p_i}$$

Donde,

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial p_j}=\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j}+\tilde{q}_j\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial m}$$

(4) La matriz de Slutsky sea semidefinida negativa.

$$\left\{\frac{\partial q_i}{\partial p_j}\right\} \leq 0$$

Si el sistema de demandas ordinarias con el que estemos trabajando cumple con este conjunto de propiedades, luego, las estimaciones econométricas y las medidas de bienestar estimadas a partir de estas tendrán una interpretación económica.

Las especificaciones lineales y log lineales han sido las especificaciones más utilizadas por los economistas en estudios empíricos de estimación de demandas (Just, Hueth, Schmitz; 2004). Las demandas lineales para un subconjunto de precios tiene la siguiente especificación.

$$\tilde{q}_i(\mathbf{p}, m) = \alpha_i + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} p_j + \delta_i m$$

Las condiciones necesarias que debe cumplir este sistema de demandas es: (1) que para todos los bienes el efecto ingreso sea igual a cero ($\delta = 0$) y (2) la matriz $\{\beta_{ij}\}$ sea semidefinida negativa.

También, se podría cumplir que todos los efectos ingresos deben tener el mismo signo con $\alpha_i = \delta_i(\alpha_1 + \beta_{11}/\delta_1 - \beta_{1i}/\delta_i)$, $\beta_{ij} = \beta_{1j}/\delta_1$ para todo $i \leq n \leq N$ y $\alpha_i = -\beta_{1i}/\delta_1 > 0$, $\beta_{ij} = \delta_i = 0$ para todo $i > n$ donde $\beta_{11} + \delta_1 q_1 \leq 0$.
En el caso del sistema de demandas log lineal para un subconjunto de bienes, tendríamos la siguiente representación.

$$\ln \tilde{q}_i(\mathbf{p}, m) = \alpha_i + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} \ln p_j + \delta_i \ln m$$

Las condiciones necesarias que debe cumplir este sistema de demandas son: (1) todas las elasticidades ingreso de la demanda sean idénticas con $\beta_{ij} = \beta_{ji} = 0$, o que $\beta_{ij} = 1 + \beta_{jj}$, $(1+\beta_{jj})exp(\alpha_i) = (1+\beta_{ii})exp(\alpha_j)$. O también que todas las elasticidades ingreso de la demanda sean 0 o 1 con $\beta_{ij} = 0$.

Claramente, estas condiciones son poco probables de mantener para el sistema de demandas estimado a menos que sean impuestas en la estimación, y la imposición de estas condiciones altamente restrictivas aparece como algo poco razonable.

Al cambiar varios precios de manera simultánea, el fracaso en la aplicación de las condiciones de integrabilidad origina un problema serio. La semejanza entre los resultados de Hausman y de Vartia se puede perder dando origen a ambigüedades en los resultados. Cuando fallan las condiciones de integrabilidad la única opción viable de estimación de los cambios en bienestar es la aplicación de la metodología de Willig, aunque este sea una aproximación (Just, Hueth, Schmitz; 2004). Sin embargo, la falla en la aplicación de estas condiciones también contamina la medición por la metodología de Willig, esto debido a que las demandas sobre las que se realiza la medición del cambio en el excedente del consumidor no son consistentes con el procedimiento de maximización de utilidad.

No obstante, uno puede argumentar que esta falla es menos severa en el caso de Willig debido a que lo que estamos buscando es solo una aproximación de la VC y la VE, también debido a que las demandas son estimadas para el mismo grupo de consumidores maximizadores de su utilidad, luego las fallas de consistencia con la teoría del consumidor que puedan existir se deberán más a errores econométricos que a errores de medición atribuidos a la metodología.

Este argumento resulta suficiente también para justificar las evaluaciones de políticas a través de estimaciones del excedente del consumidor cuando la falta de datos no permita estimaciones econométricas adecuadas.

No obstante, se debe reconocer que algunas formas funcionales utilizadas en varios estudios econométricos que estiman funciones de demandas pueden ser inconsistentes con la teoría económica. Si el sesgo proviene de errores de estimación por elección de la forma funcional, aunque no existan errores de medición atribuidos a la metodología, la medición del bienestar a través de Willig estaría sesgada desde un inicio. En este último caso, es mejor no aplicar dicha metodología.

En vista de lo anterior existen un conjunto de metodologías que cumplen con la imposición de las condiciones de integrabilidad para los sistemas de demandas. Esto permite estimar la VC o la VE de manera exacta guardando consistencia con la teoría económica. En este caso las condiciones de integrabilidad se deben imponer en la etapa de estimación de los sistemas de demandas.

Bajo este enfoque los parámetros de la función de demanda nos pueden ayudar a derivar expresiones exactas para los cambios en bienestar derivados de cambios simultáneos en precios.

El nuevo requerimiento en este caso es que la función de utilidad cumpla con un conjunto de condiciones plausibles: (1) que la función de utilidad sea continua, (2) que la función de utilidad sea monótona creciente, (3) que sea cuasi concava en q. Esto hace también que la función de utilidad cumpla con un conjunto de condiciones: (1) que sea continua en precios e ingreso, (2) que sea monótona decreciente en precios, (3) que sea monótona creciente con respecto al ingreso, (4) cuasi convexa en precios e ingreso, y (5) que sea una función homogénea de $\mathbf{p}/m$. Este último significa que si la función de utilidad indirecta es escrita en función de $\mathbf{p}/m$, luego la condición de homogeneidad se satisface automáticamente y sólo se necesitaría cumplir con la continuidad, la monotonicidad y la cuasi convexidad en $\mathbf{p}/m$. Cualquier función que satisfaga estas propiedades puede servir para generar sistemas de ecuaciones de demandas integrables.

Análisis Comparativo de las Cuatro Metodologías

Al final, después de haber estudiado el conjunto de metodologías para la medición del bienestar del consumidor derivado de cambios en precios e ingreso provistas por la teoría, podemos resumir las ventajas y desventajas de cada una, advirtiendo antes, que cada una de ella dependiendo del tipo de análisis de bienestar empírico que se vaya a realizar puede ser de gran ayuda para él calculo de dichas medidas.

Willig

Fortaleza, se puede utilizar información secundaria (estudios de elasticidades), es decir, no necesita que se hagan directamente estudios primarios.
Debilidad, solo se puede evaluar un cambio de precio y en el caso de elasticidades ingreso de la demanda mayor que uno, la metodología no se puede usar por que se supera el límite del cinco porciento del error. Por último, Hausman hizo la crítica de que en presencia de distorsiones la metodología de Willig no es adecuada para medir el cambio en el bienestar del consumidor (esta es la principal crítica, por la cual, Hausman justifica su metodología).

Aporte, rescata al excedente del consumidor que quedo desacreditado por Samuelson como medida de bienestar para medir cambios en beneficios del consumidor ante cambios en precios.

Hausman

Fortaleza, propone una medición exacta, que supera a la metodología del Willig.

Debilidad, la función de demanda a utilizar tiene una forma funcional (solo en función del precio que cambia y del ingreso) muy restringida y solo sirve para evaluar un cambio en precio.

Aporte, propone la primera metodología de medición exacta del cambio en el bienestar del consumidor utilizando la definición implícita de VC y de VE

Vartia

Fortaleza, no se restringe la forma funcional de la función de demanda que se utiliza para la estimación de los cambios en el ingreso.

Vartia sirve para evaluar múltiples cambios en precios.

Enfoque de Integrabilidad (Dualidad)

Por eso se propone al final el enfoque de integrabilidad, es decir, se utilizan sistemas de demandas integrables (que cumplan con las condiciones de integrabilidad) para garantizar una forma funcional que permita la estimación de una medida de bienestar con una interpretación teórica.

Si el sistema de demandas utilizado para estimar los parámetros proviene de una función de utilidad indirecta o de una función de mínimo gasto legítima, luego se encontrará consistencia teórica en la interpretación de las medidas de bienestar estimadas. Este enfoque es conocido con el nombre de dualidad en la teoría del consumidor.

Referencias

- Braden J. B & Kolstad C. D., (1998). *Contributions to Economic Analysis: Measuring the Demand for Environmental Quality*. North – Holland.
- Deaton, A., and Muellbauer, J., (1980). *Economics and Consumer Behavior*. Cambridge University Press.
- Freeman III, M., (1993; 2003). *The Measurement of Environmental and Resources Values*. Resources for the Future.
- Just, R., Hueth, D., and Schmitz, A., (2004). *The Welfare Economics of Public Policy: A Practical Approach to Project and Policy Evaluation*, Edward Elgar Editorial.
- Just, R., Hueth, D., and Schmitz, A., (1982). *Applied Welfare Economics and Public Policy*. Prentice Hall.
- Mas – Colell A., Whinston M. D. & Green J. R., (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press.
- Silberberg, E., (1990). The Structure of Economics. A Mathematical Analysis. International Edition. McGraw-Hill.
- Varian, H., (1991). *Microeconomics Analysis*. Third Edition. Norton Publisher.
- William J. Baumol and Charles A. Wilson, (2001). *Welfare Economics: Volume I, II and III*. The International Library of Critical in Economics 126.
- Sadoulet E. y Janvry A. (1995). *Quantitative Development Policy Analiysis*. The Johns Hopkins University Press. Baltimore and London.